非線形関数解析学

不動点定理とその周辺

東京工業大学助教授
理学博士　高橋涉 著

現代数学
ゼミナール
7

近代科学社

現代数学ゼミナール

7

非線形関数解析学

不動点定理とその周辺

東京工業大学助教授・理学博士
高橋渉 著

近代科学社

はしがき

非線形関数解析学は，物理，機械工学，オペレーションズ・リサーチ，経済学などの進歩に刺激されて最近急激に発展してきている数学の一分野である．

これまでの関数解析学は線形作用素とその応用が中心的課題であって，種々の分野で発生する非線形問題を解決するまでには至らなかった．しかしながら，最近不動点理論を中心とする非線形理論の急速な発展に伴い，その周辺の研究が盛んになり大きな学問領域を形成するに至った．これが非線形関数解析学である．この非線形関数解析学は，とかく関数解析学の副次的なものと思われがちだが，今やそれは独自の道を歩きはじめたといっても過言ではなかろう．すなわち，その理論や方法は問題の本質的部分に触れている場合が多く，線形のそれよりも直接問題解決につながることが多いからである．

本書は，このような非線形関数解析学の基礎となる部分を，不動点理論の立場から難しい理論や概念を用いることなくわかりやすく書き下したものである．1回に1節勉強する形式で，31節にまとめ，それを第1章から第6章に配した．第1章では，関数解析学からの準備と，本書を通してよく用いられる凸関数やBanach limit，縮小写像の不動点定理などの基本定理が取り扱われている．第2章では，Hilbert空間における非線形問題，特にnonexpansive写像の不動点定理と非線形エルゴード定理を取り扱うが，非線形関数解析学の醍醐味が味わえるところである．Hilbert空間で非線形問題を取り扱うと比較的気持ちよく解けることが多いが，Banach空間で同じ問題を考えると，とたんに難しく，複雑になってしまうことが多い．それは空間の幾何学的構造によるものである．そこで第3章では，Banach空間の凸性やノルムの微分可能性などの幾何学的性質について論じている．第4章では，第3章の結果を用いてBanach空間での増大作用素のresolventの収束定理とnonexpansive写像の非線形エルゴード定理が証明されている．凸性やノルムの微分可能性が，それらの証明においてどのように関わりをもつかをみていただきたい．第4章までのnonexpansive写像の不動点定理や非線形エルゴード定理，それに増大作用素のresolventの収束定理の証明において，Banach limitがよく用いられているが，それは本書の特徴の1つでもある．第5章では，まずBrouwerの不

動点定理と1の分解定理を使ってFan–Browderの不動点定理を証明し，その後それを用いて種々の不動点定理，minimax定理，Mazur–Orliczの定理などの重要な定理を拡張した形で証明している．第5章を読み終えたとき，不動点定理の“強さ”を感じていただければ幸いである．第6章は不動点定理の応用である．ここでは微分方程式への応用ではなく，計画数学やゲームの理論を考慮しての応用を考えた．

本書で取り扱った内容は，基本的とはいえ種々の不動点定理を用いていろいろな形で理論を展開しているので，数学をめざす人々にはもちろんのこと，物理，機械工学，オペレーションズ・リサーチ，経済学などの分野で活躍する人人にとってもきっと役立つものと思われる．

また，本書のところどころにその内容に関係のある未解決問題をいくつか載せてあるので，余力のある読者はそれに挑戦していただきたい．

本書を作製するにあたって，近代科学社の牧野末喜氏と蔵持信朗氏には特別お世話になった．また東京工業大学大学院生の塩路直樹君及び溝口紀子さんには原稿を通読してもらった．ここに深く感謝致します．

昭和63年3月

著者しるす

目　　次

1

非線形関数解析学を学ぶための準備

この章の§1.1，§1.2では，非線形関数解析学，特に不動点理論を学ぶのに必要な位相空間とBanach空間の基礎知識を述べることにする．その後の§1.3，§1.4，§1.5では，以後よく用いられるであろう基本定理を取り扱う．

1.1 位相空間

まず初めに順序と位相についての基礎知識を述べる．

順序集合——集合 X $(\neq\phi)$ の要素の間に，つぎの3条件を満たす2項関係 $\leqq$ が定義されているものとする．

（1） $x\leqq x$;

（2） $x\leqq y$，$y\leqq x$ ならば $x=y$;

（3） $x\leqq y$，$y\leqq z$ ならば $x\leqq z$.

このとき，集合 X を**順序集合**または**半順序集合**という．

順序集合 X の部分集合を A とする．$x\leqq a$ $(\forall x\in A)$ を満たすような A の要素 a があるとき，a を A の**最大要素**という．A に最大要素があればそれは1つであるから，それを $a=\max A$ で表す．A の**最小要素**についても同様に定義され，$\min A$ で表す．

$x\leqq a$ $(\forall x\in A)$ を満たす X の要素 a があるとき，A は**上に有界**であるといい，そのような a を A の**上界**という．A が**下に有界**であるとか，A の**下界**についても同様に定義される．

集合 A の上界全体の集合に最小要素 a_0 があるとき，この a_0 を A の**上限**または**最小上界**といい，$a_0=\sup A$ で表す．A の**下限**または**最大下界**についても

同様に定義され，$\inf A$ で表される．

順序集合 X において，その任意の2つの要素 x, y が比較可能，すなわち $x \leqq y$ または $y \leqq x$ が成り立つとき，この順序集合 X を**全順序集合**という．順序集合 X の部分集合で，全順序になっているものを**鎖**(chain)という．

順序集合 X の要素 a で，a より大きい要素がないとき，すなわち，$a \leqq b$ かつ $a \neq b$ であるような要素 b がないとき，a を X の**極大要素**という．**極小要素**についても同様に定義される．

つぎの定理は関数解析学ではよく使われるものである．

定理 1.1.1 (Zorn の補題)　X が順序集合で，その鎖がすべて上界(下界)をもてば，X は少なくとも1つの極大(極小)要素をもつ．

注　この命題は選択公理と同値であることが証明されている．

距離空間――つぎに距離空間について述べておく．

集合 X の任意の2つの要素 x, y に対して，つぎの3つの条件を満たすような実数値関数 $d(x, y)$ を x と y の間の**距離**または**距離関数**という．

(1)　$d(x, y) \geqq 0$;　また $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(2)　$d(x, y) = d(y, x)$;

(3)　$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

空でない集合 X と，その上に定義された距離 d を合わせ考えたものを**距離空間**といい，(X, d) または単に X で表し，X の各要素を**点**ともよぶ．

距離空間 X の点を x_0 とし，r を正の数とするとき，

$$S_r(x_0) = \{x \in X \colon d(x_0, x) < r\}$$

で定義される X の部分集合 $S_r(x_0)$ を，中心が x_0 で半径が r の**開球**という．開球 $S_r(x_0)$ に対し，

$$S_r[x_0] = \{x \in X \colon d(x_0, x) \leqq r\} \qquad (\text{ただし，} 0 \leqq r < \infty)$$

で定義される X の部分集合 $S_r[x_0]$ を，中心が x_0 で半径が r の**閉球**という．

G を距離空間 X の部分集合とする．G の任意の点 x に対して，x を中心とする十分小さい開球 $S_r(x)$ をとり，$S_r(x) \subset G$ となるようにできるとき，G を X の**開集合**であるという．$F \subset X$ とする．F の補集合 F^c が開集合のとき，F を**閉集合**という．

X, Y を距離空間とし，f を X から Y への写像とする．このとき，f が**点 x_0 で連続**であるとは，任意の正の数 ε に対して，正の数 δ が存在して，

$$d(x, x_0) < \delta \text{ ならば } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

が成り立つことである．X の各点 x で f が連続なとき，f は **X で連続**または

単に**連続**であるという．X から Y への写像 f が**非拡大**，または **nonexpansive** であるとは，任意の $x,y\in X$ に対して

$$d(f(x),f(y))\leqq d(x,y)$$

が成り立つときをいう．また X から Y への写像 f が**縮小写像**(contraction)であるとは，ある r $(0\leqq r<1)$ が存在して，任意の $x,y\in X$ に対して

$$d(f(x),f(y))\leqq rd(x,y)$$

が成り立つときをいう．非拡大写像および縮小写像は明らかに連続写像となる．

X を距離空間とし，$\{x_n\}$ を X の点列とする．$\{x_n\}$ が X の点 x に**収束する**というのは，任意の正の数 ε に対して，ある正の整数 n_0 が決まって，$n\geqq n_0$ ならば $d(x_n,x)<\varepsilon$ となるときをいう．このとき，$x_n\to x$ または $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ と表し，x を $\{x_n\}$ の**極限**であるという．$\{x_n\}$ を X の点列とする．正の数 ε に対して，正の整数 n_0 が存在して，$m,n\geqq n_0$ のとき $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ が成り立つとき，$\{x_n\}$ は **Cauchy 列**あるいは**基本列**であるという．距離空間 X において，どんな Cauchy 列 $\{x_n\}$ も収束して，その極限 x が X の点であるとき，X は**完備**であるという．完備距離空間ではつぎの定理が成り立つ．

定理 1.1.2 (Cantor の定理) X を完備距離空間とし，$\{F_n\}$ を X の空でない閉集合の減少列，すなわち $F_1\supset F_2\supset\cdots$ とし，かつ

$$\delta(F_n)=\sup\{d(x,y):\ x,y\in F_n\}\to 0$$

とする．このとき，$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ はただ1点からなる．

また，完備距離空間ではつぎの不動点定理もよく知られている．

定理 1.1.3 (縮小写像の不動点定理) X を完備距離空間とし，f を X から X への縮小写像とするとき，X の中に f の不動点，すなわち $f(x)=x$ となるような点 x がただ1つ存在する．

証明 f は X から X への縮小写像であるから，

$$d(f(x),f(y))\leqq rd(x,y)\qquad (\forall x,y\in X)$$

となるような r $(0\leqq r<1)$ が存在する．いま，x_0 を X の任意の点とし，

$$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1)=f^2(x_0),\cdots,x_n=f(x_{n-1})=f^n(x_0),\cdots$$

とおくと，

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_n)&=d(f(x_n),f(x_{n-1}))\leqq rd(x_n,x_{n-1})\\&=rd(f(x_{n-1}),f(x_{n-2}))\leqq r^2d(x_{n-1},x_{n-2})\leqq\cdots\\&\leqq r^nd(x_1,x_0).\end{aligned}$$

よって，$m>n$ のとき三角不等式を繰り返し用いて

$$d(x_m,x_n)\leqq d(x_m,x_{m-1})+d(x_{m-1},x_{m-2})+\cdots+d(x_{n+1},x_n)$$

$$\leqq r^{m-1}d(x_1,x_0)+r^{m-2}d(x_1,x_0)+\cdots+r^n d(x_1,x_0)$$
$$=r^n(1+r+\cdots+r^{m-n-1})d(x_1,x_0)$$
$$\leqq \frac{r^n}{1-r}d(x_1,x_0).$$

これから $m>n\to\infty$ のとき $d(x_m,x_n)\to 0$. したがって，$\{x_n\}$ はCauchy列であることがわかる．X は完備なので，$x_n\to x$ となる X の点 x が存在する．この点 x が不動点であることが，f の連続性からつぎのようにしていえる．

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

つぎに不動点の一意性を示そう．x のほかに，y が f の不動点であったとする．

$$d(x,y)=d(f(x),f(y))\leqq rd(x,y)$$

が成り立ち，両辺を $d(x,y)$ $(\neq 0)$ で割ると，$1\leqq r$ となって $0\leqq r<1$ に矛盾する．よって，f の不動点はただ1つである．▨

注　上の命題において，縮小写像のところを非拡大写像と置き換えてしまうと命題は成立しなくなる．その例はいくらでもつくれる．

位相空間——集合 X $(\neq\phi)$ において，つぎの3条件を満たすような部分集合族 $\boldsymbol{G}$ が与えられているものとする．

（1）　$X\in\boldsymbol{G}$，$\phi\in\boldsymbol{G}$;

（2）　$\boldsymbol{G}$ に属する任意個の集合の和は，また $\boldsymbol{G}$ に属する．すなわち，

$$G_\mu\in\boldsymbol{G}\ (\mu\in M)\ \text{ならば}\ \bigcup_{\mu\in M}G_\mu\in\boldsymbol{G}.$$

（3）　$\boldsymbol{G}$ に属する有限個の集合の共通部分は，また $\boldsymbol{G}$ に属する．すなわち，

$$G_i\in\boldsymbol{G}\ (i=1,2,\cdots,n)\ \text{ならば}\ \bigcap_{i=1}^{n}G_i\in\boldsymbol{G}.$$

集合 X と集合族 $\boldsymbol{G}$ を合わせ考えたものを，**位相空間**(topological space)といい，$(X,\boldsymbol{G})$ または単に X で表す．このとき，$\boldsymbol{G}$ は X の**位相を定める**，または単に $\boldsymbol{G}$ は X の**位相**であるともいう．$\boldsymbol{G}$ の元を**開集合**という．また，X の点 x を含む開集合のことを x の**近傍**，X の集合 A を含む開集合のことを A の**近傍**ということもある．X の部分集合 F が**閉集合**であるとは，その補集合 F^c が開集合となるときをいう．X の部分集合 A に対して，$\bar{A}$ は A の閉包を表す．すなわち，A を含む最小の閉集合のことである．

X を距離空間とし，X の開集合(p.2を参照)の全体を $\boldsymbol{G}$ とすると，$\boldsymbol{G}$ は位相の条件を満たすから，X は位相空間となる．このように距離によって定まる位相を**距離位相**という．

X を空でない集合とし，$\boldsymbol{S}$ を X のある部分集合族とする．このとき，まず

$\boldsymbol{S}$ に属する有限個の集合の共通部分からなる集合族 $\boldsymbol{B}$ をつくり，さらに $\boldsymbol{B}$ に属する集合の任意個の和からなる集合族 $\boldsymbol{G}$ をつくると，$(X, \boldsymbol{G})$ は位相空間になる．この位相 $\boldsymbol{G}$ を，$\boldsymbol{S}$ によって**生成される位相**とよぶことにする．

$(X, \boldsymbol{G})$ を位相空間とする．X のある開集合の族 $\boldsymbol{B}$ が X の**開基底**または**開基**であるとは，$\boldsymbol{G}$ の任意の元，すなわち X の開集合 G がつねに $\boldsymbol{B}$ に属する集合の和集合で表されるときをいう．これはまた，任意の開集合 G が与えられたとき，G の任意の点 x に対して，$x \in B \subset G$ となる B $(\in \boldsymbol{B})$ がつねに存在することとも同じである．距離空間 X の開球の全体 $\boldsymbol{B}$ は X の開基になっている．また $\boldsymbol{S}$ を位相空間 X の開集合の族とする．$\boldsymbol{S}$ の有限個の集合の共通部分からなる集合族 $\boldsymbol{B}$ が，X の開基底になるとき，$\boldsymbol{S}$ は X の**準開基底**または**準開基**であるという．

X, Y を位相空間とする．X から Y への写像 f が X の**点 $\boldsymbol{a}$ で連続**であるとは，点 $b=f(a)$ の任意の近傍 $U(b)$ に対して a の近傍 $U(a)$ が存在して，

$$f(U(a)) \subset U(b)$$

となるときをいう．X から Y への写像 f が，X のすべての点で連続なとき，f は **$\boldsymbol{X}$ で連続**であるという．f が X で連続であるための必要十分条件は，Y の任意の開集合 G に対して $f^{-1}(G)=\{x \in X\colon f(x) \in G\}$ が X の開集合となることである．

X を位相空間とし，$A \subset X$ とする．X の開集合のある族 $\{G_\mu\colon \mu \in M\}$ が A を覆っているとき，すなわち $A \subset \bigcup_\mu G_\mu$ となっているとき，$\{G_\mu\colon \mu \in M\}$ を A の**開被覆**という．特に $\{G_\mu\}$ が有限個の開集合からなっているとき**有限開被覆**という．位相空間 X の部分集合 A の任意の開被覆 $\{G_\mu\colon \mu \in M\}$ が与えられたとき，それから適当な有限個 $G_{\mu_1}, G_{\mu_2}, \cdots, G_{\mu_n}$ を選んで，$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\mu_i}$ とできるとき，A は**コンパクト**(compact)である，あるいは**コンパクト集合**であるという．特に X 自体がコンパクト集合であるとき，X は**コンパクト空間**という．

集合 X の部分集合のある族を $\boldsymbol{F}$ とする．$\boldsymbol{F}$ が**有限交叉性**をもつとは，$\boldsymbol{F}$ に属する任意の有限個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ をとるとき，これらは必ず共通点をもつことと定める．位相空間 X がコンパクトであるための必要十分条件は，X の有限交叉性をもつ閉集合の任意の族が共通点をもつことである．

X を位相空間とする．X の任意の相異なる 2 点 x, y に対し，x を含み y を含まない近傍 U が存在し，同時に y を含み x を含まない近傍 V が存在するとき，X を **$\boldsymbol{T_1}$ 空間**という．

位相空間 X が **Hausdorff 空間**，または **$\boldsymbol{T_2}$ 空間**，または**分離空間**であると

は，任意の相異なる2点 x, y に対し，$x \in U_x$，$y \in U_y$，$U_x \cap U_y = \phi$ を満たす x, y のそれぞれの近傍 U_x, U_y が存在するときをいう．

位相空間 X が T_1 空間で，かつつぎの条件を満たすとき，X は**正規空間**であるという．

F および H を任意の2つの空でない閉集合とし，$F \cap H = \phi$ とするとき，

$$F \subset U, \quad H \subset V, \quad U \cap V = \phi$$

を満たす開集合 U, V が存在する．

定理 1.1.4　距離空間は正規空間である．

定理 1.1.5　コンパクト Hausdorff 空間は正規空間である．

また，正規空間に対してはつぎの定理が成り立つ．

定理 1.1.6 (Urysohn の定理)　X を正規空間とし，F, H を空でない閉集合で，$F \cap H = \phi$ を満たすとする．このとき，X 上の実数値連続関数で

$$f(F) = \{0\}, \quad f(H) = \{1\}, \quad 0 \leqq f(x) \leqq 1 \quad (\forall x \in X)$$

となるものが存在する．

X_μ $(\mu \in M)$ を位相空間とし，$\boldsymbol{G}_\mu$ を X_μ の位相とする．直積 $X = \prod_\mu X_\mu$ の部分集合族

$$\boldsymbol{S} = \{\prod_\mu G_\mu : G_\mu \in \boldsymbol{G}_\mu \ (\mu \in M),\ 1 \text{ 個の } G_\mu \text{ を除き } G_\mu = X_\mu\}$$

によって生成される位相を**直積位相**といい，この位相をもつ X を X_μ $(\mu \in M)$ の**直積空間**または**直積位相空間**という．

定理 1.1.7 (直積空間のコンパクト性)　位相空間 X_μ $(\mu \in M)$ がすべてコンパクトならば，直積空間 $X = \prod_\mu X_\mu$ もまたコンパクトである．

ネット——集合 D の要素の間に関係 $\leqq$ が定義されていて，つぎの3条件を満たすとき，D を**有向集合**あるいは**上に有向な集合**という．

(1)　$\alpha \leqq \alpha$;

(2)　$\alpha \leqq \beta$，$\beta \leqq \gamma$ ならば $\alpha \leqq \gamma$;

(3)　α, β に対し，$\alpha \leqq \gamma$，$\beta \leqq \gamma$ であるような γ が存在する．

X を位相空間とし，D を有向集合とする．そのとき，

$$\{x_\alpha : \alpha \in D\} \qquad (\text{ただし，} x_\alpha \text{ はすべて } X \text{ の点})$$

を X の**有向点列**，または**ネット**(net)といい，簡単に $\{x_\alpha\}$ で表すことがある．

X の有向点列 $\{x_\alpha\}$ が X の点 x に**収束する**というのは，x の任意の近傍 U に対して，ある $\alpha_0 \in D$ が決まって，$\alpha \geqq \alpha_0$ ならば $x_\alpha \in U$ となることであると定める．このとき，

$$x_\alpha \to x, \quad \text{または} \quad \lim_\alpha x_\alpha = x$$

と表し，x を $\{x_\alpha\}$ の**極限**であるという．

X を位相空間とし，$\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ を X のネットとする．ネット $\{x_{\alpha_\beta}\colon \beta\in E\}$ がつぎの条件を満たすとき，$\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ の**部分有向点列**または**部分ネット**(subnet)であるという．

(1) $\{x_{\alpha_\beta}\colon \beta\in E\}\subset\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$;

(2) 任意の $\alpha_0\in D$ に対して，$\beta_0\in E$ が存在して，$\beta_0\leqq\beta$ ならば $\alpha_0\leqq\alpha_\beta$ となる．

定理 1.1.8 X および Y を位相空間とし，f を X から Y への写像とする．f が点 x_0 で連続であるための必要十分条件は，$x_\alpha\to x_0$ となる X の任意のネット $\{x_\alpha\}$ に対して，つねに $f(x_\alpha)\to f(x_0)$ が成り立つことである．

定理 1.1.9 X を位相空間とする．このとき，X がコンパクトであるための必要十分条件は，X の任意のネットが収束する部分ネットをつねにもつことである．

X を位相空間とし，$\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ を X のネットとする．点 $p\in X$ がネット $\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ の**収積点**(cluster point)であるとは，p を含む任意の開集合 U と $\alpha\in D$ に対して，$x_\beta\in U$, $\beta\geqq\alpha$ となるような $\beta\in D$ が存在するときである．

定理 1.1.10 X を位相空間とし，$\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ を X のネットとする．そのとき，$p\in X$ が $\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ の収積点であるならば $\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ のある部分ネットが p に収束するようにとれる．また，$\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ のある部分ネットが p に収束するならば p は $\{x_\alpha\colon \alpha\in D\}$ の収積点である．

X を空でない集合，Y_μ $(\mu\in M)$ を位相空間，f_μ $(\mu\in M)$ を X から Y_μ への写像とする．このとき，各 f_μ を連続にする X 上の位相で最弱なものが存在するが，X 上のこの位相を $\{f_\mu\colon \mu\in M\}$ によって生成される**弱位相**という．

定理 1.1.11 X を空でない集合，$(Y_\mu, \boldsymbol{G}_\mu)$ $(\mu\in M)$ を位相空間，f_μ $(\mu\in M)$ を X から Y_μ への写像とする．このとき，$\{f_\mu\colon \mu\in M\}$ によって生成される X 上の弱位相は，X の部分集合族

$$\{f_\mu^{-1}(G)\colon \mu\in M,\ G\in\boldsymbol{G}_\mu\}$$

によって生成される位相のことである．

定理 1.1.12 X を空でない集合とし，Y_μ $(\mu\in M)$ を位相空間とする．f_μ $(\mu\in M)$ を X から Y_μ への写像とし，X には $\{f_\mu\colon \mu\in M\}$ によって生成される弱位相が入っているとする．このとき，X 上のネット $\{x_\alpha\}$ が x_0 に収束するための必要十分条件は，各 μ に対して $f_\mu(x_\alpha)\to f_\mu(x_0)$ となることである．

X を空でない集合とし，Y を位相空間とする．$M(X, Y)$ で X から Y への

写像の全体を表すことにする．すると $A\in M(X, Y)$ は直積空間

$$\prod_{x\in X} Y_x \qquad (\text{ただし，すべての } x\in X \text{ に対し } Y_x=Y)$$

の元と考えることができる．だから $M(X, Y)=\prod_{x\in X} Y_x$ である．$M(X, Y)$ の位相として，Y_x $(x\in X)$ の直積位相を考えたものを**各点収束位相**という．この位相で，$M(X, Y)$ のネット $\{A_\alpha\}$ が A に収束するための必要十分条件は，すべての $x\in X$ に対して，$A_\alpha x\to Ax$ となることである．

問　題 1.1

1.　X をコンパクト空間とし，f を X から X への写像とする．このとき，$f(M)\subset M$ を満たす X の空でない閉集合 M で，包含関係の意味で極小なものが存在することを示せ．

2.　X を完備距離空間，f を X から X への写像で，ある自然数 n をとると，f^n が X 上で縮小写像になっているものとする．すなわち，すべての $x, y\in X$ に対して

$$d(f^n(x), f^n(y))\leqq rd(x, y)$$

がつねに成り立つような実数 r $(0\leqq r<1)$ が存在するものとする．このとき，f は X の中にただ1つの不動点をもつ．

3.　X を距離空間とする．K を X のコンパクト集合とし，T を X から K への連続写像とする．このとき，任意の自然数 n に対して，$d(Tx_n, x_n)<\dfrac{1}{n}$ となるような $x_n\in X$ がつねに存在するならば，T は不動点をもつ．これを示せ．

4.　X, Y を位相空間とする．また $\boldsymbol{B}$ を Y の開基底，$\boldsymbol{S}$ を Y の準開基底とする．このとき，f が X で連続であることと，つぎの条件（1）または（2）とは同値である．これを示せ．

（1）　$\boldsymbol{B}$ の任意の元 B に対して，$f^{-1}(B)$ は X の開集合となる;

（2）　$\boldsymbol{S}$ の任意の元 S に対して，$f^{-1}(S)$ は X の開集合となる．

5.　X を有界な完備距離空間とする．このとき Cantor の定理(定理 1.1.2)より，縮小写像の不動点定理(定理 1.1.3)を導け．

注　5 で X に有界を仮定しなくてもよい．

1.2 Banach 空間，Hilbert 空間

この節では，後でよく使われる Banach 空間と Hilbert 空間の性質について述べることにしよう．また線形位相空間や順序ノルム空間についてはこの本で必要なものだけを述べる．

線形空間——空でない集合 E が，つぎの条件（1）〜（8）を満たすとき，E を**線形空間**または**ベクトル空間**という．

E の任意の要素 x, y に対し，**和** $x+y$ が定義され，それが E の 1 つの要素と定められていて，つぎの（1）〜（4）を満たす．

（1） $x+y=y+x$;

（2） $(x+y)+z=x+(y+z)$;

（3） 任意の要素 x に対し，$x+0=x$ となる要素 0 がある;

（4） 任意の要素 x に対し，$x+(-x)=0$ となる要素 $-x$ がある．

スカラー α および E の任意の要素 x に対し，**スカラー倍** αx が定義され，それが E の 1 つの要素と定められていて，つぎの（5），（6）を満たす．

（5） $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

（6） $1\cdot x=x$.

和とスカラー倍はつぎの関係を満たす．

（7） $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

（8） $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

線形空間の要素を**点**または**ベクトル**という．スカラーとして用いられる数が実数の場合の線形空間を**実線形空間**または**実ベクトル空間**といい，複素数の場合を**複素線形空間**または**複素ベクトル空間**という．以下で特に断わらない限り，線形空間といったときは，実線形空間を意味するものとする．

線形空間 E の空でない部分集合 M が，条件

（1） $x, y\in M$ ならば $x+y\in M$;

（2） M の任意の要素 x と，任意のスカラー α に対し $\alpha x\in M$

を満たすとき，M を E の**線形部分空間**または単に**部分空間**という．

$S\subset E$ とする．S の任意有限個の元の線形結合の全体からなる集合は，明らかに線形部分空間になるが，この空間を S から**生成される線形部分空間**または S によって**張られる線形部分空間**とよび，$[S]$ で表す．$[S]$ はまた S を含む最小の部分空間でもある．

E のベクトル $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の1次結合を0とおいた式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

が，少なくとも1つは0でない $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ によって成り立つとき，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は**1次従属**であるという．また，$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ ならば，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ になるとき，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は**1次独立**であるという．

$C \subset E$ とする．C が**凸集合**であるとは，任意の $x, y \in C$ と α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ に対して，$\alpha x + (1-\alpha) y \in C$ が成立することである．$S \subset E$ とする．S の任意有限個の元の凸結合 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ (ただし，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$) の全体からなる集合は明らかに凸集合になるが，この凸集合を $\mathrm{co}\, S$ で表し，S から**生成される凸集合**または S の**凸包**とよぶ．S から生成される凸集合 $\mathrm{co}\, S$ は S を含む最小の凸集合でもある．

X を線形空間 E の部分空間とする．X 上で定義され，値を実数にとる線形写像は X 上の**線形汎関数**(linear functional)とよばれる．

X 上の線形汎関数の全体に，和とスカラー倍を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad (\forall x \in X)$$

と定義することによって，それは線形空間になるが，この空間を X' で表し，X の**代数的な共役空間**(algebraic conjugate space)とよぶ．E' は E の代数的な共役空間である．

Banach 空間——E を線形空間とする．E の任意の要素 x に対して，つぎの条件を満たすような実数 $\|x\|$ があるとき，$\|x\|$ を**ノルム**(norm)という．

(1)　$\|x\| \geqq 0$;　また $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2)　$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

(3)　$\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

線形空間 E に，ノルム $\|x\|$ を考え合わせたものを**線形ノルム空間**(linear normed space)または単に**ノルム空間**という．

ノルム空間は，$d(x, y) = \|x-y\|$ によって距離空間になるが，この距離で完備となるノルム空間を **Banach 空間**とよぶ．すなわち，完備なノルム空間を Banach 空間とよぶのである．

E, F をノルム空間とする．E から F への線形写像 T に対して，ある定数 $K \geqq 0$ が存在して，

$$\|Tx\| \leqq K \|x\| \qquad (\forall x \in E)$$

が成り立つとき，T は**有界**(bounded)であるという．

T が E から F への線形写像のとき，T が有界であることと，T が連続であ

ることとは同値である．E から F への有界線形写像に対して，T の**ノルム**は

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqq 1}\|Tx\|$$

で与えられる．簡単な計算で

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\inf\{K:\ K\geqq 0,\ \|Tx\|\leqq K\|x\|\ \ (\forall x\in E)\}$$

が示される．また，$\|Tx\|\leqq\|T\|\|x\|$ $(\forall x\in E)$ も成り立つ．F が実数体 $\boldsymbol{R}$ のときは，E から $\boldsymbol{R}$ への有界線形写像は，通常**有界線形汎関数**とよばれる．

E, F をノルム空間とするとき，E から F への線形連続写像の全体を，$B(E, F)$ で表す．$T, S\in B(E, F)$ に対して，和 $T+S$ およびスカラー倍 αT を

$$(T+S)(x)=T(x)+S(x),\qquad (\alpha T)(x)=\alpha\cdot T(x)\qquad (\forall x\in E)$$

で定義すれば，$B(E, F)$ は線形空間になる．さらに，つぎの定理が成り立つ．

定理 1.2.1 E をノルム空間，F を Banach 空間とする．$B(E, F)$ の元 T に対して，そのノルムを

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqq 1}\|Tx\|$$

で定義すると，$B(E, F)$ は Banach 空間となる．

特に，F を実数体 $\boldsymbol{R}$ とすると，$B(E, \boldsymbol{R})$ は Banach 空間になるが，この Banach 空間を E^* と表し，E の**共役空間**(conjugate space)とよぶことにする．

E, F をノルム空間とし，$T\in B(E, F)$ とする．このとき T の**共役作用素** T^* を

$$(T^*f)(x)=f(Tx)\qquad (f\in F^*,\ x\in E)$$

で定義する．すると $T^*\in B(F^*, E^*)$ である．

定理 1.2.2 (Hahn–Banach の定理) M をノルム空間 E の線形部分空間とし，$f\in M^*$ とする．このとき，f は E 上の連続線形汎関数 f_0 に拡張され，しかも $\|f_0\|=\|f\|$ となるようにできる．

Hahn–Banach の定理からつぎの 2 つの系が得られる．

系 1.2.3 E をノルム空間とし，$x_0\neq 0$ とする．このとき，

$$f(x_0)=\|x_0\|,\qquad \|f\|=1$$

となる $f\in E^*$ が存在する．

系 1.2.4 E をノルム空間とし，M をその閉部分空間とする．$x_0\notin M$ とするとき，E 上の線形連続汎関数 f で

$$f(M)=\{0\},\quad f(x_0)=1,\quad \|f\|=\frac{1}{d}$$

となるものが存在する．ただし，$d=\inf\{\|x_0-y\|:\ y\in M\}$ である．

Hahn–Banach の定理の変形として，分離定理といわれるつぎの定理が証明される．

定理 1.2.5（分離定理）　E をノルム空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．$x \notin C$ のとき，E の線形連続汎関数 f で

$$f(x) < \inf\{f(y):\ y \in C\}$$

となるものが存在する．

つぎの定理は一様有界定理として知られている．

定理 1.2.6（一様有界定理）　E を Banach 空間，N をノルム空間とする．$\{T_\alpha\}$ を E から N への連続線形写像の族とし，つぎの条件を満たすものとする：

E の任意の元 x に対して，$\{T_\alpha x\}$ は N の有界集合となる．

このとき，$\{\|T_\alpha\|\}$ は有界集合である．

この定理の簡単な結果として，つぎの定理が得られる．

定理 1.2.7　X をノルム空間 E の空でない集合とする．このとき，X が有界であるための必要十分条件は，任意の $f \in E^*$ に対して，$f(X)$ が有界となることである．

また，つぎの定理も興味がある．

定理 1.2.8（Bishop–Phelps の定理）　C を Banach 空間 E の有界な閉凸集合とする．このとき，C 上で最大値に達する連続線形汎関数の全体は E^* でノルムの意味で稠密である．

Banach 空間 E が $E=(E^*)^*$ であるとき，E は**回帰的**(reflexive)であるといわれる．

定理 1.2.9　Banach 空間 E が回帰的であるための必要十分条件は，その共役空間 E^* が回帰的となることである．

Banach 空間 E とその共役空間 E^* に対して，

$$S(E)=\{x \in E:\ \|x\|=1\}, \qquad S(E^*)=\{f \in E^*:\ \|f\|=1\}$$

を定義する．このとき，James による回帰性に関するつぎの定理がある．

定理 1.2.10（James の定理）　Banach 空間 E が回帰的であることと，任意の $f \in S(E^*)$ に対して，$f(x)=1$ となる $x \in S(E)$ が存在することとは同値である．

弱位相——つぎに弱位相，および弱*位相について述べる．

x_0 を Banach 空間 E の任意の元とし，f を E^* の元とする．このとき，$\varepsilon>0$ に対して，集合

$$U(x_0 : f, \varepsilon) = \{x \in E : |f(x - x_0)| < \varepsilon\}$$

を考えることができる．このような集合の全体から生成される E 上の位相は E の**弱位相**(weak topology)といわれる．明らかに，これは $\{f : f \in E^*\}$ によって生成される弱位相と一致する(p.7 を参照)．定理 1.1.12 より，この位相においてネット $\{x_\alpha\}$ が x_0 に収束するための必要十分条件は，任意の $f \in E^*$ に対して，$f(x_\alpha) \to f(x_0)$ となることである．

Banach 空間 E の点列 $\{x_n\}$ が x_0 に収束する(ノルムの意味で)ならば，任意の $f \in E^*$ に対して，

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leqq \|f\| \|x_n - x_0\|$$

であるから，$f(x_n) \to f(x_0)$ である．よって，$\{x_n\}$ は x_0 に弱位相で収束する．Banach 空間 E の点列 $\{x_n\}$ が x_0 に弱位相で収束するとき，$\{x_n\}$ は x_0 に**弱収束**するといわれ，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，または $x_n \rightharpoonup x_0$ で表される．定理 1.2.7 を用いると，点列 $\{x_n\}$ が x_0 に弱収束するならば $\{\|x_n\|\}$ は有界数列となることがわかる(問題 1.2.1)．弱収束に対し，$\{x_n\}$ が x_0 にノルムで収束するとき，$\{x_n\}$ は x に**強収束**するといわれ，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ または $x_n \to x$ で表される．

弱位相に関してはつぎの命題がある．

定理 1.2.11 Banach 空間 E が回帰的であるための必要十分条件は，E の閉単位球 $B = \{x \in E : \|x\| \leqq 1\}$ が弱位相でコンパクトとなることである．

これからつぎの命題が得られる．

系 1.2.12 Banach 空間 E が回帰的であるための必要十分条件は，E の有界閉凸集合が弱位相でコンパクトとなることである．

また，分離定理(定理 1.2.5)から，つぎの命題が得られる(問題 1.2.2)．

定理 1.2.13 C が Banach 空間 E の凸集合とする．このとき，C がノルムの意味(強位相)で閉集合であることと，弱位相で閉集合であることとは同値である．

C を Banach 空間 E の部分集合とする．C の任意の点列 $\{x_n\}$ がつねに E の点に弱収束するような部分点列をもつとき，C は**弱点列コンパクト**(weakly sequentially compact)であるといわれる．

定理 1.2.14 E を回帰的な Banach 空間とする．このとき，E の部分集合 C が弱点列コンパクトであるための必要十分条件は，C が有界集合となることである．

f_0 を E^* の元とし，x を E の元とする．このとき，$\varepsilon > 0$ に対して，f_0 を含む E^* の集合

$$U(f_0;\ x,\varepsilon)=\{f\in E^*:\ |f_0(x)-f(x)|<\varepsilon\}$$

を考えることができる．このような集合の全体から生成される E^* 上の位相は，E^* の**弱*位相**(weak* topology)といわれる．この位相は $\{\hat{x}:\ x\in E\}$ によって生成される弱位相と一致する(p.7 を参照)．ただし，

$$\hat{x}(f)=f(x)\qquad ({}^\forall f\in E^*)$$

である．E^* の点列 $\{f_n\}$ が f_0 に弱*位相で収束するとき，$\{f_n\}$ は f_0 に**弱*収束**するといわれ，$\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n=f_0$ または $f_n\xrightarrow{\mathrm{w}^*}f_0$ で表す．前と同様，$f_n\xrightarrow{\mathrm{w}^*}f_0$ ならば，$\{\|f_n\|\}$ は有界数列となる．

つぎの定理は Alaoglu の定理として有名である．

定理 1.2.15 (Alaoglu の定理)　Banach 空間 E の共役空間 E^* の閉単位球 $B^*=\{f\in E^*:\ \|f\|\leqq 1\}$ は弱*位相でコンパクトである．

Hilbert 空間——複素線形空間 H の任意の要素 x,y に対して，複素数(x,y)が定まり，つぎの 4 条件を満たすとき，(x,y) を x と y の**内積**といい，内積の定義されている H を**内積空間**という．

(1)　$(x,x)\geqq 0$;　また $(x,x)=0\Longleftrightarrow x=0$;

(2)　$(x,y)=\overline{(y,x)}$;

(3)　$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$;

(4)　$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$ (ただし，α は複素数)．

複素線形空間 H の代わりに実線形空間をとり，内積 (x,y) の値を実数とした場合を**実内積空間**という．この場合上の条件 (2) は $(x,y)=(y,x)$ に，条件 (4) の α は実数となる．後で非線形写像などを考えるとき，複素数よりも実数のほうが便利であるので，前と同様，特に断わらなければ以下実数の場合を考える．

H を内積空間とし，その要素 x のノルムを $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ で定義すると，これはノルムの条件を満たし，H はノルム空間になる．このノルムが完備であるとき，H は **Hilbert 空間**であるといわれる．すなわち，完備な内積空間を Hilbert 空間というのである．

定理 1.2.16 (Schwarz の不等式)　内積空間 H の 2 つの要素 x,y に対し，

$$|(x,y)|\leqq\|x\|\|y\|$$

がつねに成り立つ．

定理 1.2.17 (平行四辺形公式)　内積空間 H の 2 つの要素 x,y に対し，

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

がつねに成り立つ．

定理 1.2.18 (Riesz の定理) H を Hilbert 空間とする．内積 (x, y) において，y を固定して考えて

$$f(x) = (x, y) \qquad (*)$$

とおけば，f は H 上の有界線形汎関数となり，$\|f\| = \|y\|$ が成り立つ．逆に，H 上の任意の有界線形汎関数 f に対して，(*) 式が成り立つような y $(\in H)$ がただ1つ存在する．

線形位相空間——集合 E がつぎの条件を満たすとき，E は**線形位相空間** (linear topological space) とよばれる．

(1) E は線形空間である；

(2) E は Hausdorff 空間である；

(3) x, y の和 $x+y$ は2変数 x, y に関して連続である；

(4) x とスカラー α との積 αx は2変数 α, x に関して連続である．

線形位相空間 E の 0 の基本近傍系が凸近傍系になっているとき，E は**局所凸な線形位相空間** (locally convex linear topological space) といわれる．このとき，E 上の線形連続汎関数の全体 E^* は E の点を分離する．すなわち，

$$f(x) = 0 \ \ (\forall f \in E^*) \Longrightarrow x = 0$$

が成り立つ．もっと一般に，定理 1.2.5 と同様の結果もいえる．

E を線形空間とし，x_1, x_2 を E の元とする．このとき，

$$x = (1-t)x_1 + tx_2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

となる要素 x の全体を x_1 と x_2 を結ぶ**線分**といい，$[x_1, x_2]$ で表す．E の凸集合 X の点 x が，X 内に両端点をもつようないかなる線分の内点にもなっていないとき，x は X の**端点** (extreme point) であるという．X の端点の全体を $\mathrm{ex}\, X$ と書くこともある．

定理 1.2.19 (Krein–Milman の定理) X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とする．このとき，$\mathrm{ex}\, X \neq \phi$ である．また，

$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}\, X) = X$$

である．ただし，$\overline{\mathrm{co}}\, A$ は A の凸包の閉包である．

E を線形空間とする．E 上の半順序 $\geqq$ がつぎの条件を満たすとき**線形順序**であるといわれる．

(1) $x \geqq y \Longrightarrow x+z \geqq y+z \ \ (\forall z \in E)$；

(2) $x \geqq y \Longrightarrow \lambda x \geqq \lambda y \ \ (\forall \lambda \geqq 0)$．

$E_+ = \{x \in E \colon x \geqq 0\}$ とすると E_+ は凸錐となる．すなわち，$x, y \in E_+$ ならば，$x+y \in E_+$，$\lambda x \in E_+$ $(\forall \lambda \geqq 0)$ である．E_+ を**正錐**といい，E_+ の元を**正**であ

るという．また，E_+ の元 x で，$x \neq 0$ となるものを $x \gneqq 0$ と書くことがある．線形順序をもつノルム空間を**順序ノルム空間**(ordered normed space)という．この本では，順序ノルム空間 E といったら，E_+ は閉な凸錐であり，0 と異なる元をもつものとする．E^* を順序ノルム空間 E の共役空間とする．E^* の2つの元 f, g に対し，$f(x) \geqq g(x)$ $(\forall x \geqq 0)$ のとき，$f \geqq g$ と順序を定義する．

問　題 1.2

1. E を Banach 空間とし，$x_n \rightharpoonup x_0$ とする．このとき $\{x_n\}$ は E の有界点列である．これを示せ．

2. C を Banach 空間 E の凸集合とする．このとき，C が強位相で閉集合であることと，弱位相で閉集合であることとは同じである．これを示せ．

3. E を Banach 空間とし，T を E から E への縮小写像とする．このとき，任意の $z \in E$ に対して，$Tu - u = z$ となる $u \in E$ が一意に存在する．また，$(T - I)^{-1}$ は一様連続である．これを示せ．ただし，I は恒等写像を表す．

4. E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．また $f \in S(E^*)$ とする．このとき，Bishop–Phelps の定理(定理 1.2.8)を使って，$S(E^*)$ の点列 $\{f_n\}$ で，つぎの条件 (1), (2) を満たすものが存在する．これを示せ．

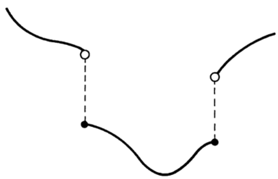
　(1)　$\|f_n - f\| \to 0$;

　(2)　任意の n に対して $f_n(x_n) = 1$ となるような $\{x_n\} \subset S(E)$ が存在する．

1.3　下半連続関数と凸関数

非線形関数解析学，特に凸解析学では，凸関数および下半連続関数が重要な役割を演じるが，この節では，それらの関数の基本的性質について学ぶことにする．

その前に以後よく用いられる3つの記号を説明しておく．$\boldsymbol{N}$ は自然数の全体である．$\boldsymbol{R}$ は実数の全体を表し，$(-\infty,\infty]$ は $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ のことである．



X を位相空間とし，f を X から $(-\infty,\infty]$ への関数とする．このとき，f が X 上で**下半連続**であるとは，任意の実数 a に対して，集合

$$\{x\in X:\ f(x)\leqq a\}$$

がつねに閉集合となるときをいう．

定理 1.3.1（最小値の定理）　X をコンパクト空間とし，f を X から $(-\infty,\infty]$ への下半連続な関数とする．このとき，f は X 上のどこかで最小値をとる．

証明　任意の実数 $a\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$G_a=\{x:\ f(x)>a\}$$

とすると，G_a は X の開集合で，$X=\bigcup_{a\in\boldsymbol{R}}G_a$ となる．X はコンパクトなので，$\{G_a:\ a\in\boldsymbol{R}\}$ の中から有限個 $\{G_{a_1},G_{a_2},\cdots,G_{a_n}\}$ を選んで

$$X=\bigcup_{i=1}^{n}G_{a_i}$$

とすることができる．$a_0=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ とすると，すべての $x\in X$ に対して，$f(x)>a_0$ となる．よって，$\{f(x):\ x\in X\}$ は下に有界となり，その下限

$$b=\inf\{f(x):\ x\in X\}$$

が存在する．いま，$f(x_0)=b$ となる $x_0\in X$ が存在しないとする．すなわち，

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x:\ f(x)>b+\frac{1}{n}\right\}$$

とすると，X はコンパクトなので，

$$X=\bigcup_{i=1}^{m}\left\{x:\ f(x)>b+\frac{1}{n_i}\right\}.$$

よって，

$$b'=\min\left\{b+\frac{1}{n_1},b+\frac{1}{n_2},\cdots,b+\frac{1}{n_m}\right\}$$

とすると，すべての $x\in X$ に対して，$f(x)>b'$ となる．ゆえに，

$$b=\inf\{f(x):\ x\in X\}\geqq b'>b$$

となり，これは矛盾である．よって，$f(x_0)=b$ となる $x_0\in X$ が存在する． ▨

注 X がコンパクトであるとき，X から $(-\infty,\infty]$ への下半連続関数 f は下に有界，すなわち，ある実数 M が存在して，

$$M\leqq f(x)\qquad({}^\forall x\in X)$$

となるが，一般に，ある集合 X から $(-\infty,\infty]$ に値をとる関数 f が**下に有界**であるとは，ある実数 M が存在して，

$$M\leqq f(x)\qquad({}^\forall x\in X)$$

となるときをいう．

X を位相空間とし，f を X から $(-\infty,\infty]$ への関数とする．このとき，X のネット $\{x_\alpha\}$ に対して，$\{f(x_\alpha)\}$ の**下極限**と**上極限**を

$$\underline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha)=\sup_{\alpha}\inf_{\alpha\leqq\beta} f(x_\beta),\qquad \overline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha)=\inf_{\alpha}\sup_{\alpha\leqq\beta} f(x_\beta)$$

で定義する．

定理 1.3.2（下半連続であるための必要十分条件） X を位相空間とし，f を X から $(-\infty,\infty]$ への関数とする．このとき，f が X 上で下半連続となるための必要十分条件は，X の任意の点 x_0 に対して，

$$x_\alpha\to x_0 \Longrightarrow f(x_0)\leqq\underline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha)$$

となることである．

証明 f が下半連続であるとし，$f(x_0)<\infty$ とする．また，$x_\alpha\to x_0$ とする．任意の正数 ε に対して，

$$K_\varepsilon=\{x\in X:\ f(x_0)-\varepsilon<f(x)\}$$

とすると，$x_0\in K_\varepsilon$ で，K_ε は開集合である．よって，α_0 が存在して，$\alpha\geqq\alpha_0$ ならば $x_\alpha\in K_\varepsilon$ である．これは $f(x_0)-\varepsilon<f(x_\alpha)$ $(\alpha\geqq\alpha_0)$ を意味するから

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq\inf_{\alpha_0\leqq\alpha} f(x_\alpha).$$

よって，

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq\underline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha).$$

ε は任意なので，$f(x_0)\leqq\underline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha)$ である．$f(x_0)=\infty$ のときは，任意の実数 a に対して，集合 $\{x:\ f(x)>a\}$ は x_0 の近傍となるので，$x_\alpha\to x_0$ ならば，ある α_0 が存在して

$$\alpha\geqq\alpha_0\Longrightarrow f(x_\alpha)>a.$$

よって，$\inf_{\alpha_0\leqq\alpha} f(x_\alpha)\geqq a$ となり，$\underline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha)\geqq a$ となる．a は任意の実数なので，

$$\underline{\lim}_{\alpha} f(x_\alpha)=\infty=f(x_0).$$

逆は，$r\in\boldsymbol{R}$ に対し，$X_r=\{x:\ f(x)\leqq r\}$ が閉集合であることを示せばよいが，$x_\alpha\to x_0$，$x_\alpha\in X_r$ とすると，$f(x_\alpha)\leqq r$ $(\forall\alpha)$ であるから，

$$\inf_{\alpha\leqq\beta} f(x_\beta)\leqq r \qquad (\forall\alpha).$$

仮定より，

$$f(x_0)\leqq\varliminf_{\alpha} f(x_\alpha)\leqq r$$

であるから，$x_0\in X_r$ となる．ゆえに，X_r は閉集合である．▨

定理 1.3.3（下半連続関数の sup は下半連続） X を位相空間とし，$\{f_\alpha:\ \alpha\in I\}$ を X から $(-\infty,\infty]$ への下半連続関数の族とする．このとき，

$$g(x)=\sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$$

で定義される関数 $g:\ X\to(-\infty,\infty]$ は下半連続である．

証明 任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\{x:\ g(x)\leqq a\}&=\{x:\ \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x)\leqq a\}\\&=\bigcap_{\alpha\in I}\{x:\ f_\alpha(x)\leqq a\}\end{aligned}$$

であり，f_α は下半連続であるから，$\{x:\ g(x)\leqq a\}$ は閉集合となる．よって $g:\ X\to(-\infty,\infty]$ は下半連続である．▨

定理 1.3.4（下半連続関数の正数倍と和は下半連続） X を位相空間とし，f と g を X から $(-\infty,\infty]$ への下半連続関数とする．このとき，$\alpha\geqq 0$ に対して

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

で定義される関数 αf と $f+g$ は X 上で下半連続である．

証明 $\alpha=0$ のときは，$(\alpha f)(x)=0$ $(\forall x\in X)$ であるから明らかである．$\alpha>0$ のときは，$a\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$G_a=\{x:\ (\alpha f)(x)\leqq a\}=\left\{x:\ f(x)\leqq\frac{a}{\alpha}\right\}$$

であるから，G_a は閉集合となる．よって，αf は下半連続となる．

つぎに，$f+g$ が下半連続であることを示す．

その前に，任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して，

$$\{x:\ f(x)+g(x)>a\}=\bigcup_{c\in\boldsymbol{R}}[\{x:\ f(x)>c\}\cap\{x:\ g(x)>a-c\}]$$

が成り立つことを示そう．最初に $\subseteq$ を示す．$f(x)+g(x)>a$ としよう．$f(x)<\infty$ のときは，$f(x)+g(x)>a+\varepsilon$ となる正の数 ε をとり，$c=f(x)-\varepsilon$ とおけば，$c\in\boldsymbol{R}$ で，$f(x)>c$，$g(x)>a+\varepsilon-f(x)=a-c$ となるからよい．つぎに，$f(x)=\infty$ の場合を考える．$g(x)=\infty$ のときは c は任意にとってよいし，$g(x)$

$=b\in\boldsymbol{R}$ のときは，$c=a-b+1$ とすればよいので $\subseteq$ は示せた．逆の包含関係は明らかである．

よって，$\{x: f(x)+g(x)>a\}$ は開集合になるから，$f+g$ は下半連続関数となる．▨

E を線形空間，X を E の凸集合，f を X から $(-\infty,\infty]$ への関数とする．このとき，f が X 上で**凸関数**であるとは，任意の $x_1, x_2\in X$ と任意の $t\in[0,1]$ に対して，

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

がつねに成り立つときをいう．

定理 1.3.5　X を線形空間 E の凸集合とし，f を X から $(-\infty,\infty]$ への凸関数とする．このとき，任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$G_a=\{x: f(x)\leqq a\}$$

は凸集合である．

証明　$x_1, x_2\in G_a$，$t\in[0,1]$ に対して，

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\leqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \\ &\leqq ta+(1-t)a=a \end{aligned}$$

であるから，$tx_1+(1-t)x_2\in G_a$ である．よって，G_a は凸集合である．▨

定理 1.3.6（凸関数の sup は凸関数）　X を線形空間 E の凸集合とし，$\{f_\alpha: \alpha\in I\}$ を X から $(-\infty,\infty]$ への凸関数の族とする．このとき，

$$g(x)=\sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$$

で定義される X 上の関数 g は凸関数である．

証明　$x_1, x_2\in X$ と $t\in[0,1]$ に対して，

$$f_\alpha(tx_1+(1-t)x_2)\leqq tf_\alpha(x_1)+(1-t)f_\alpha(x_2)$$

が任意の $\alpha\in I$ について成り立つので，

$$\begin{aligned} g(tx_1+(1-t)x_2) &=\sup_\alpha f_\alpha(tx_1+(1-t)x_2) \\ &\leqq t\sup_\alpha f_\alpha(x_1)+(1-t)\sup_\alpha f_\alpha(x_2) \\ &=tg(x_1)+(1-t)g(x_2). \end{aligned}$$

よって g は凸関数となる．▨

定理 1.3.7（凸関数の正数倍と和は凸関数）　X を線形空間 E の凸集合とし，f と g を X から $(-\infty,\infty]$ への凸関数とする．このとき，$\alpha\geqq 0$ に対して，

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x), \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

で定義される X 上の関数 αf と $f+g$ は凸関数である．

証明　定義より明らかである．▨

E を Banach 空間とし，X を E の凸集合とする．また φ を X から $(-\infty, \infty]$ への凸関数とする．このとき，φ が **proper** であるとは，$\varphi(x)<\infty$ となる $x\in X$ が存在するときをいう．X 上の proper な凸関数 φ に対して，φ の**定義域**を

$$D(\varphi)=\{x\in X:\ \varphi(x)<\infty\}$$

で表す．

定理 1.3.8 X を Banach 空間 E の閉凸集合とし，f を X から $(-\infty, \infty]$ への凸関数とする．このとき，f がノルムで下半連続であることと，弱位相で下半連続なこととは同値である．

証明 任意の $a\in \boldsymbol{R}$ に対して

$$G_a=\{x\in X:\ f(x)\leqq a\}$$

を考えると，これは凸集合である．このとき，定理 1.2.13 によって，G_a が弱位相で閉集合であることと，G_a がノルムで閉集合であることとは同値であるから，f が弱位相で下半連続であることと，f がノルムで下半連続であることとは同値である．▨

定理 1.3.9 (最小値の定理) X を Banach 空間 E の弱位相の意味でコンパクトな凸集合とする．f を X から $(-\infty, \infty]$ への proper で凸な下半連続関数とする．このとき，

$$f(x_0)=\min_{x\in X} f(x)$$

となる $x_0\in D(f)$ が存在する．

証明 f は proper であるから，十分大きな λ_0 に対して

$$D_0=\{x\in X:\ f(x)\leqq\lambda_0\}\neq\phi.$$

条件より，D_0 は X の閉凸集合である．したがって D_0 は弱コンパクトで凸な集合である．f は凸で下半連続な関数なので，定理 1.3.8 より弱位相でも下半連続関数となる．よって，定理 1.3.1 を使うと

$$f(x_0)=\min_{x\in D_0} f(x)=\min_{x\in X} f(x)$$

となる $x_0\in D_0\subset X$ が存在する．▨

定理 1.3.10 (最小値の定理) E を回帰的な Banach 空間とし，X を E の空でない閉凸集合とする．また φ を X から $(-\infty, \infty]$ への proper で凸な下半連続関数とし，φ は $\|x_n\|\to\infty$ のとき，$\varphi(x_n)\to\infty$ を満たすものとする．このとき，

$$\varphi(x_0)=\inf\{\varphi(x):\ x\in X\}$$

となるような $x_0 \in D(\varphi)$ が存在する.

証明　$d=\inf\{\varphi(x): x\in X\}$ とし，$\varphi(x_n)\to d$ となるような点列 $\{x_n\}$ を選ぶ．もし $\{x_n\}$ が有界でないならば，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在して，$\|x_{n_i}\|\to\infty$ となる．このとき φ の条件より $\varphi(x_{n_i})\to\infty$ となるから $d\neq\infty$ に矛盾する．よって $\{x_n\}$ は有界である．E は回帰的なので，定理 1.2.14 より，$\{x_n\}$ は弱収束するような部分列 $\{x_{n_i}\}$ を含む．$x_{n_i}\rightharpoonup x_0$ としよう．φ は弱位相に関しても下半連続なので，定理 1.3.2 より，

$$d\leqq\varphi(x_0)\leqq\varliminf_{i\to\infty}\varphi(x_{n_i})=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=d.$$

よって $\varphi(x_0)=d$ となる．　▨

注　この定理において，X を回帰的な Banach 空間の有界閉凸集合とすると，$\|x_n\|\to\infty$ となる点列 $\{x_n\}$ が存在しないから，定理の仮定はすべて満たされ

$$\varphi(x_0)=\inf\{\varphi(x): x\in X\}$$

となる $x_0\in D(\varphi)$ が存在することになる．したがって，上の定理は Banach 空間に回帰的な条件があるときは定理 1.3.9 の拡張になっているといえる．この定理は今後よく用いられるので特に覚えておいてほしい．

問　題 1.3

1.　E を Banach 空間とし，$x_n\rightharpoonup x_0$ とする．このとき，$\|x_0\|\leqq\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$ である．これを示せ．また，$f_n\xrightarrow{w^*}f_0$ $(f_n, f_0\in E^*)$ ならば $\|f_0\|\leqq\varliminf_{n\to\infty}\|f_n\|$ でもある．これを示せ．

注　連続な凸関数はもちろん弱位相で下半連続な凸関数になる．

2.　C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とする．このとき，E から $(-\infty,\infty]$ への関数 g を

$$g(z)=\begin{cases}1 & (z\in C)\\ \infty & (z\notin C)\end{cases}$$

とすると，g は下半連続な凸関数である．これを示せ．

3.　Banach 空間 E において，C を E の空でない閉凸集合とし，$x\in E$ とする．E から $(-\infty,\infty]$ への関数 g を

$$g(z)=\begin{cases}\|x-z\| & (z\in C)\\ \infty & (z\notin C)\end{cases}$$

とすると，g は下半連続な凸関数である．これを示せ．

4.　E を Banach 空間とし，$\{x_n\}$ を E の有界な点列とする．このとき，

$$g(x)=\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n-x\| \qquad (\forall x\in E)$$

で定義される E 上の実数値関数 g は連続な凸関数である．これを示せ．

5.　E を Banach 空間とし，$\{x_n\}$ を E の有界な点列とする．このとき，

$$g(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x\|^2 \qquad (\forall x\in E)$$

で定義される E 上の実数値関数 g は連続な凸関数である．これを示せ．

X を位相空間とし，f を X から $[-\infty,\infty)$ への関数とする．このとき，f が X 上で**上半連続**であるとは，任意の実数 a に対して，集合

$$\{x\in X:\ f(x)\geqq a\}$$

がつねに閉集合となるときをいう．

6.　X を位相空間とし，f を X から $\boldsymbol{R}$ への関数とする．このとき，f が連続であるための必要十分条件は，f が下半連続であり，かつ上半連続となることである．これを示せ．

7.　X をコンパクト空間とし，f を X から $[-\infty,\infty)$ への上半連続な関数とする．このとき，f は X 上のどこかで最大値をとる．これを示せ．

8.　X を位相空間とし，f を X から $[-\infty,\infty)$ への関数とする．このとき，f が X 上で上半連続であるための必要十分条件は，X の任意の点 x_0 に対して，

$$x_\alpha\to x_0 \Longrightarrow \overline{\lim_{\alpha}}\, f(x_\alpha)\leqq f(x_0)$$

となることである．これを示せ．

X を線形空間 E の凸集合とし，f を X から $[-\infty,\infty)$ への関数とする．このとき，f が**凹関数**であるとは，任意の $x_1,x_2\in X$ と $t\in[0,1]$ に対して，

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\geqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

がつねに成り立つときをいう．

9.　X を線形空間 E の凸集合とし，$\{f_\alpha:\ \alpha\in I\}$ を X から $[-\infty,\infty)$ への凹関数の族とする．このとき，

$$g(x)=\inf_{\alpha\in I} f_\alpha(x)$$

で定義される X 上の関数 g は凹関数である．これを示せ．

1.4　完備距離空間における存在定理

完備距離空間における縮小写像の不動点定理は，いろいろな分野で極めて重要な定理となっているが，最近 Ekeland によってその定理より有用性に関しては勝るとも劣らないつぎの定理が証明された．

定理 1.4.1 (Ekeland の定理)　X を完備距離空間とし，$F\colon X\to(-\infty,\infty]$ を proper で下に有界な下半連続関数とする．このとき，正の数 $\varepsilon>0$ と

$$F(u)\leqq\inf_{x\in X}F(x)+\varepsilon$$

となる $u\in X$ に対して，つぎの 3 条件を満たす $v\in X$ が存在する．

（1）　$F(v)\leqq F(u)$;

（2）　$d(u,v)\leqq 1$;

（3）　v と異なる $w\in X$ に対して，$F(w)>F(v)-\varepsilon d(v,w)$ である．

証明　$u_0=u$ として，点列 $\{u_0,u_1,u_2,\cdots\}$ を帰納的につぎのように定義する．$u_n\in X$ が知られているものとし，

$$S_n=\{w\in X\colon\ w\neq u_n,\ \ F(w)\leqq F(u_n)-\varepsilon d(u_n,w)\}$$

とする．このとき，$u_{n+1}\in X$ を

$$u_{n+1}=\begin{cases}u_n & (S_n=\phi \text{ のとき})\\ w\in S_n & (S_n\neq\phi \text{ のとき})\end{cases}$$

とする．ただし，$S_n\neq\phi$ のときの $w\in S_n$ は

$$F(w)\leqq\inf_{x\in S_n}F(x)+\frac{1}{2}\{F(u_n)-\inf_{x\in S_n}F(x)\}\tag{*}$$

を満たすものとする．このような $w\in S_n$ が存在することは，$w'\in S_n$ に対して

$$0<\varepsilon d(u_n,w')\leqq F(u_n)-F(w')\leqq F(u_n)-\inf_{x\in S_n}F(x)$$

であることと下限の定義からわかる．

このようにしてつくった点列 $\{u_n\}$ に対して

$$0\leqq\varepsilon d(u_n,u_{n+1})\leqq F(u_n)-F(u_{n+1})\tag{**}$$

が成立することは u_{n+1} の定義から明らかである．また，$m>n$ に対して，

$$\begin{aligned}\varepsilon d(u_n,u_m)&\leqq\sum_{j=n}^{m-1}\varepsilon d(u_j,u_{j+1})\\&\leqq\sum_{j=n}^{m-1}\{F(u_j)-F(u_{j+1})\}\\&=F(u_n)-F(u_m).\end{aligned}\tag{***}$$

$\{F(u_n)\}$ は (**) より単調減少数列であり，仮定より下に有界であるので，数列 $\{F(u_n)\}$ は収束する．よって $\{F(u_n)\}$ は Cauchy 数列となり，前の不等式 (***) より，点列 $\{u_n\}$ も Cauchy 列になることがわかる．ここで X は完備なので，点列 $\{u_n\}$ は X のある点 $v\in X$ に収束する．この v が 3 条件 (1)，(2)，(3) を満たすことを示そう．(**) から

$$F(u_n)\leqq F(u) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

であり，F が下半連続なので

$$F(v)\leqq \varliminf_{n\to\infty} F(u_n)=\lim_{n\to\infty} F(u_n)\leqq F(u).$$

(***) において，$n=0$ とおくと

$$\varepsilon d(u,u_m)\leqq F(u)-F(u_m)\leqq F(u)-\inf_{x\in X} F(x)\leqq \varepsilon$$

となり，上の不等式で $m\to\infty$ とすると，$\varepsilon d(u,v)\leqq\varepsilon$ となる．よって，$d(u,v)\leqq 1$ である．(3) を示すのに，つぎの 2 つの場合を考える．

(i) 有限個を除いて，$u_n=u_{n+1}$ のとき；このとき，ある N が存在して，$v=\lim_{n\to\infty} u_n=u_N$ である．$S_N=\phi$ であるので (3) がいえる．

(ii) 無限個の $\{u_{n_i}\}$ に対して，$u_{n_i}\neq u_{n_i+1}$ のとき；(3) がいえないとしよう．すると $v\neq w$ となる X の元 w で，$F(w)\leqq F(v)-\varepsilon d(v,w)$ を満たすものが存在する．(***) で $m\to\infty$ とすると

$$\varepsilon d(u_n,v)\leqq F(u_n)-\lim_{m\to\infty} F(u_m) \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

よって，$F(v)\leqq \lim_{n\to\infty} F(u_n)$ より

$$\begin{aligned}F(w)&\leqq F(v)-\varepsilon d(v,w)\\&\leqq F(v)-\varepsilon d(v,w)+F(u_n)-\lim_{m\to\infty} F(u_m)-\varepsilon d(u_n,v)\\&\leqq F(u_n)-\varepsilon\{d(u_n,v)+d(v,w)\}\\&\leqq F(u_n)-\varepsilon d(u_n,w)\end{aligned}$$

となり，$w\in S_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ である．一方 (*) より

$$2F(u_{n_i+1})-F(u_{n_i})\leqq \inf_{x\in S_{n_i}} F(x)\leqq F(w)$$

であるから，$n_i\to\infty$ とすると

$$F(v)\leqq F(w)\leqq F(v)-\varepsilon d(v,w)<F(v)$$

となる．これは矛盾である． ▨

系 1.4.2 X を完備距離空間とし，F: $X\to(-\infty,\infty]$ を proper で下に有界な下半連続関数とする．このとき，正の数 $\varepsilon>0$ に対して，つぎの 2 条件を満たす $v\in X$ が存在する．

（1）　$F(v) \leqq \inf_{x \in X} F(x) + \varepsilon$;

（2）　すべての $w \in X$ に対して，$F(w) \geqq F(v) - \varepsilon d(v, w)$ である.

証明　正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，下限の定義から

$$F(u) \leqq \inf_{x \in X} F(x) + \varepsilon$$

となる $u \in X$ が存在する．ここで定理 1.4.1 を用いると，（1），（2）を満たす $v \in X$ の存在がわかる． ▨

系 1.4.2 を用いて，すでに証明されている縮小写像の不動点定理(定理 1.1.3)を証明してみよう．縮小写像の不動点定理はつぎのようなものであった.

X を完備距離空間とし，f を X から X への縮小写像とする．すなわち，X のすべての点 x, y に対して，

$$d(f(x), f(y)) \leqq r d(x, y)$$

がつねに成り立つような実数 r $(0 \leqq r < 1)$ が存在するとする．このとき，X の中に f の不動点がただ 1 つ存在する.

証明　$F(w) = d(w, f(w))$ とし，$0 < \varepsilon < 1 - r$ とする．系 1.4.2 を使うと，すべての $w \in X$ に対して，

$$F(w) \geqq F(v) - \varepsilon d(v, w)$$

となるような $v \in X$ が存在する．ここで，$w = f(v)$ とすると

$$\begin{aligned} d(v, f(v)) &\leqq d(f(v), f(f(v))) + \varepsilon d(v, f(v)) \\ &\leqq r d(v, f(v)) + \varepsilon d(v, f(v)) \\ &= (r + \varepsilon) d(v, f(v)). \end{aligned}$$

もし $d(v, f(v)) \neq 0$ とすると，$1 \leqq r + \varepsilon$ となり，$1 > r + \varepsilon$ であることに矛盾する．よって，$d(v, f(v)) = 0$，すなわち $f(v) = v$ である．このような v がただ 1 つであることは，定理 1.1.3 の証明と同じであるのでここでは省略する． ▨

系 1.4.2 を用いて，完備距離空間におけるもう 1 つの不動点定理を証明してみよう.

定理 1.4.3 (Caristi の不動点定理)　X を完備距離空間とし，F: $X \to \boldsymbol{R}$ を下に有界な下半連続関数とする．f: $X \to X$ を

$$d(x, f(x)) \leqq F(x) - F(f(x)) \qquad (\forall x \in X)$$

を満たす写像とするとき，f は X の中に不動点をもつ.

証明　$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ として，系 1.4.2 を用いる．すると，すべての $w \in X$ に対し

$$F(w) \geqq F(v) - \frac{1}{2} d(v, w)$$

となるような $v \in X$ が存在する．ここで $w = f(v)$ とすると

$$F(v)-F(f(v))\leqq\frac{1}{2}d(v,f(v)).$$

仮定より，

$$d(v,f(v))\leqq F(v)-F(f(v))$$

であるから，

$$d(v,f(v))\leqq\frac{1}{2}d(v,f(v))$$

を得る．だから，$d(v,f(v))=0$ となる．よって，v は f の不動点である．▨

最後に完備距離空間における集合に値をもつ写像の不動点定理を証明しよう．その前に2つの定義を与えておく．

X を距離空間とし，A,B を X の空でない部分集合とする．このとき，**点 $x\in X$ から，集合 B までの距離**を

$$d(x,B)=\inf\{d(x,b):\ b\in B\}$$

で定義する．また，これを用いて，

$$\delta(A,B)=\sup\{d(x,B):\ x\in A\}$$

を定義する．すると，$\delta(A,B)$ はつぎの性質をもつ．

補助定理 1.4.4　A,B,C を距離空間 X の空でない有界な集合とする．このとき，つぎの（i），（ii）が成り立つ．

（i）$\delta(A,B)=0\Leftrightarrow A\subset\bar{B}$;

（ii）$\delta(A,B)\leqq\delta(A,C)+\delta(C,B)$.

証明　（i）

$$\begin{aligned}\delta(A,B)=0&\Leftrightarrow d(x,B)=0 &&(\forall x\in A)\\&\Leftrightarrow x\in\bar{B} &&(\forall x\in A)\\&\Leftrightarrow A\subset\bar{B}.\end{aligned}$$

（ii）$a\in A$, $b\in B$, $c\in C$ に対して，

$$d(a,b)\leqq d(a,c)+d(c,b).$$

b は B の任意の点でよいから，上式の下限をとって

$$d(a,B)\leqq d(a,c)+d(c,B).$$

よって，$d(a,B)-d(c,B)\leqq d(a,c)$．$c$ は C の任意の点でよいから，

$$d(a,B)\leqq d(a,C)+\delta(C,B).$$

a は A の任意の点でよいから，上式の上限をとって，

$$\delta(A,B)\leqq\delta(A,C)+\delta(C,B).$$

よって，補助定理は証明された．▨

補助定理1.4.4を用いると，つぎの定理が証明できる．

定理 1.4.5　X を距離空間とし，$\boldsymbol{Z}$ を X の空でない有界閉集合の全体とす

る．このとき，$A, B \in \boldsymbol{Z}$ に対して，A, B の距離を，

$$H(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$$

で定義すると，$(\boldsymbol{Z}, H)$ は距離空間になる．

証明　$H(A, B) \geqq 0$ は明らか．また，

$$\begin{aligned} H(A, B) = 0 &\Longleftrightarrow \delta(A, B) = \delta(B, A) = 0 \\ &\Longleftrightarrow A \subset \bar{B} = B,\ B \subset \bar{A} = A \Longleftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

つぎに，$H(A, B) = H(B, A)$ は定義より明らか．最後に，

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \\ &\leqq \max\{\delta(A, C) + \delta(C, B), \delta(B, C) + \delta(C, A)\} \\ &= \max\{\delta(A, C) + \delta(C, B), \delta(C, A) + \delta(B, C)\} \\ &\leqq \max\{\delta(A, C), \delta(C, A)\} + \max\{\delta(C, B), \delta(B, C)\} \\ &= H(A, C) + H(C, B) \end{aligned}$$

がいえるので，$(\boldsymbol{Z}, H)$ は距離空間となる．　▨

この距離 H は **Hausdorff metric** とよばれる．

X を距離空間とし，$\boldsymbol{Z}$ を X の空でない有界閉集合の全体とする．このとき，X から $\boldsymbol{Z}$ への写像 T が**非拡大**(**nonexpansive**)であるとは，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$H(Tx, Ty) \leqq d(x, y)$$

が成り立つときをいう．また X から $\boldsymbol{Z}$ への写像 T が**縮小**(contraction)であるとは，ある非負な数 r $(0 \leqq r < 1)$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して，

$$H(Tx, Ty) \leqq rd(x, y)$$

が成り立つときをいう．

定理 1.4.6（縮小写像の不動点定理）　X を完備距離空間とし，$\boldsymbol{Z}$ を X の空でない有界閉集合の全体とする．このとき，X から $\boldsymbol{Z}$ への縮小写像 T は X の中に不動点をもつ．すなわち，$x_0 \in Tx_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する．

証明　T は縮小写像だから，ある r $(0 \leqq r < 1)$ が存在して，

$$H(Tx, Ty) \leqq rd(x, y) \qquad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ．いま，$r < r_1 < 1$ となる r_1 をとる．このとき，$u_0 \in X$ に対して，u_1 を Tu_0 から任意にとる．$u_1 = u_0$ のときは定理は証明されたことになるから，$u_1 \neq u_0$ とする．u_2 を

$$u_2 \in Tu_1, \qquad d(u_2, u_1) \leqq r_1 d(u_1, u_0)$$

となるようにとる．実際，

$$H(Tu_1, Tu_0) \leqq rd(u_1, u_0) < r_1 d(u_1, u_0)$$

であるから，$\delta(Tu_0, Tu_1)<r_1 d(u_1, u_0)$ となる．また，$u_1\in Tu_0$ であるから，

$$d(u_1, Tu_1)=\inf\{d(u_1, z):\ z\in Tu_1\}<r_1 d(u_1, u_0).$$

よって，$d(u_1, u_2)<r_1 d(u_1, u_0)$ となる $u_2\in Tu_1$ が存在する．$u_2\neq u_1$ とし，u_3 を，上の場合と同様にして，

$$u_3\in Tu_2, \qquad d(u_3, u_2)\leqq r_1 d(u_2, u_1)\leqq r_1{}^2 d(u_1, u_0)$$

となるようにとる．以下 $u_n\neq u_{n-1}$ $(n=3, 4, 5, \cdots)$ とし，u_{n+1} を

$$u_{n+1}\in Tu_n, \qquad d(u_{n+1}, u_n)\leqq r_1 d(u_n, u_{n-1})\leqq r_1{}^n d(u_1, u_0)$$

となるようにとる．このようにしてできた点列 $\{u_n\}$ が Cauchy 列になっていることをつぎに示そう．$n>m$ に対して，

$$d(u_n, u_m)\leqq \sum_{j=m+1}^{n} d(u_j, u_{j-1})\leqq \sum_{j=m+1}^{n} r_1{}^{j-1} d(u_1, u_0)$$

$$\leqq \frac{r_1{}^m}{1-r_1} d(u_1, u_0).$$

$r_1<1$ であるから，$n, m\to\infty$ のとき，$d(u_n, u_m)\to 0$ となる．よって $\{u_n\}$ は Cauchy 列である．X は完備なので，$u_n\to x_0$ となる $x_0\in X$ が存在する．いま任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$H(Tu_n, Tx_0)\leqq d(u_n, x_0)\to 0$$

であるから，ある n_0 が存在して，$n\geqq n_0$ ならば，$H(Tu_n, Tx_0)<\varepsilon$ となる．よって，

$$\delta(Tu_n, Tx_0)=\sup\{d(z, Tx_0):\ z\in Tu_n\}<\varepsilon.$$

したがって，$d(u_{n+1}, Tx_0)<\varepsilon$ $(n\geqq n_0)$ となる．Tx_0 は閉集合なので，$x_0\in Tx_0$ となる．▨

注　X, Y を空でない集合とする．このとき，X の点を Y の点に対応させる写像を一価写像とよぶのに対し，X の点を Y の集合に対応させる写像を**多価写像**(multi valued mapping)または**集合値写像**とよぶ．

問　題 1.4

1.　X をコンパクト距離空間とし，T を X から X への写像で

$$d(Tx, Ty)<d(x, y) \qquad (x\neq y)$$

を満たすものとする．このとき，T の不動点が一意に存在することを示せ．

2.　Caristi の不動点定理から，縮小写像の不動点定理を導け．

3.　X を完備距離空間とし，F: $X\to(-\infty, \infty]$ を下に有界かつ proper な下半連続関数とする．また，T を X から X への多価写像で，任意の $x\in X$ に対して

$$F(y)+d(x,y) \leqq F(x)$$

を満たすような $y \in Tx$ が存在するものとする．このとき，$x_0 \in Tx_0$ となるような点 $x_0 \in X$ が存在する．これを示せ．

4. X を距離空間，$\boldsymbol{Z}$ を X の空でない有界閉集合の全体，H を $\boldsymbol{Z}$ の Hausdorff metric とする．このとき，任意の $x \in X$ と，$B, C \in \boldsymbol{Z}$ に対して

$$|d(x,B)-d(x,C)| \leqq H(B,C)$$

が成り立つ．これを示せ．

5. 4を使って，T を X から $\boldsymbol{Z}$ への非拡大写像とするとき，

$$g(x)=d(x,Tx) \qquad (\forall x \in X)$$

で定義される関数 g は連続となることを示せ．

1.5 Banach limit と invariant mean

Banach limit の存在とその重要性は古くから知られていたが，それは非線形関数解析学を研究する上でも，有用な道具の1つとなることが実証されている．この節では，Hahn–Banach の定理を用いて，Banach limit の存在を証明することから始め，それをもっと一般的な形にして，invariant mean の理論にまで発展させる．

S を空でない集合であるとし，$B(S)$ を S 上の有界な実数値関数全体のつくる Banach 空間とする．ただし，$B(S)$ におけるノルムは

$$\|f\|=\sup_{s\in S}|f(s)|$$

である．また，$B(S)$ の2つの元 f, g に対して，$f(x)\leqq g(x)$ ($\forall x\in S$) が成り立つとき，$f\leqq g$ と表すことにする．X を $B(S)$ の部分空間で，恒等的に1となる関数 e を含むものとする．この関数 e は便宜上1と表すこともある．X 上の線形汎関数 μ が **mean** であるとは

$$\|\mu\|=\mu(e)=1$$

を満たすときをいう．X 上の mean に対して，つぎの定理が成り立つ．

定理 1.5.1 (mean と同値な条件)　X を $B(S)$ の部分空間で，e を含むものとする．このとき X 上の線形汎関数 μ に対して，つぎの条件（1）と（2）は同値である．

（1）　$\|\mu\|=\mu(e)=1$，すなわち μ は mean である;

（2）　任意の $f\in X$ に対して，つねに

$$\inf_{s\in S} f(s)\leqq\mu(f)\leqq\sup_{s\in S} f(s)$$

が成り立つ．

証明　(1)⟹(2): $f\in X$ とし，$0\leqq f$ とする．このとき，まず $\mu(f)\geqq 0$ であることを示す．もし $\mu(f)<0$ とする．いま，$f\leqq Me$ となる正数 M をとると

$$\mu(Me-f)=M\mu(e)-\mu(f)=M-\mu(f)>M.$$

ところが

$$\mu(Me-f)\leqq\|\mu\|\,\|Me-f\|=\|Me-f\|=\sup_{s\in S}|M-f(s)|\leqq M$$

であるから，これは矛盾である．よって $\mu(f)\geqq 0$ である．

任意の $f\in X$ に対して

$$\inf_{s\in S} f(s) \leqq f \leqq \sup_{s\in S} f(s)$$

であるから，上の事実を用いると

$$\inf_{s\in S} f(s) = \mu(\inf_{s\in S} f(s)) \leqq \mu(f) \leqq \mu(\sup_{s\in S} f(s)) = \sup_{s\in S} f(s).$$

よって（1）⟹（2）は証明された．

（2）⟹（1）：$f=e$ とすると，$1\leqq\mu(e)\leqq 1$ となり，$\mu(e)=1$ を得る．また，任意の $f\in X$ に対して，

$$\mu(f) \leqq \sup_{s\in S} f(s) \leqq \sup_{s\in S} |f(s)| = \|f\|$$

であるので，

$$-\mu(f) = \mu(-f) \leqq \|-f\| = \|f\|$$

も成り立つ．よって，$|\mu(f)| \leqq \|f\|$ となる．$\mu(e)=1$ と合わせると，$\|\mu\|=1$ となることがわかる． ▨

$S=\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ とすると，$B(S)$ は l^∞ のことであるが，l^∞ 上の mean で，非常に重要なもの(後で Banach limit とよばれる)が存在するのでそれについて議論しておきたい．

補助定理 1.5.2　l^∞ の元 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ に対して，

$$x'=(x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3, \cdots)$$

を定義し，$H=\{x' : x\in l^\infty\}$ とする．この H を含む最小の閉部分空間を G とするとき，$e=(1,1,\cdots)$ と G との距離 $d(e,G)=1$ である．

証明　$x', y'\in H$ とし，α をスカラーとする．そうすると，$x'+y'=(x+y)'$ であり，$\alpha x'=(\alpha x)'$ であるので，H は l^∞ の線形部分空間である．つぎに，$x'\in H$ に対して $\|x'-e\|\geqq 1$ であることを示す．もし $\|x'-e\|=a<1$ となる $x'\in H$ が存在するとしよう．$x'=(x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, \cdots)$ とすると $\|x'-e\|=a<1$ であるから，

$$|x_1-1|\leqq a,\ |x_2-x_1-1|\leqq a,\ |x_3-x_2-1|\leqq a, \cdots.$$

よって，

$$1-a\leqq x_1,\ 2(1-a)\leqq 1-a+x_1\leqq x_2,\ 3(1-a)\leqq 1-a+x_2\leqq x_3, \cdots.$$

これは $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^\infty$ であることに反する．$d(e,H)\geqq 1$ であるから，$d(e,G)\geqq 1$ であることは明らか．また $e'=(1,0,0,\cdots)$ と $e=(1,1,1,\cdots)$ との距離は 1 であるから $d(e,G)=1$ である． ▨

μ を l^∞ 上の有界線形汎関数とする．このとき l^∞ の要素 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ における μ の値を通常 $\mu(x)$ と書くが，変数を明示したいときは $\mu_n(x_n)$ と書くこともある．つぎの定理は後者の記述で書かれた定理である．

定理 1.5.3 (Banach limit の存在)　l^∞ 上の線形汎関数 μ で，つぎの条件（1），（2）を満たすものが存在する．

（1）　$\|\mu\|=\mu(e)=1$;

（2）　$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^\infty$ に対して，$\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})$ である．

証明　H, G を補助定理 1.5.2 のようであるとすると，Hahn-Banach の定理の系(系 1.2.4)より

$$\mu(G)=0, \quad \mu(e)=1, \quad \|\mu\|=1$$

となる l^∞ 上の線形汎関数 μ が存在する．あとはこの μ が（2）を満たすことを示せばよい．$e'=(1, 0, 0, \cdots)\in H$ なので，$\mu(e')=0$．したがって $u=(x_1, 0, 0, \cdots)$ に対して，$\mu(u)=\mu(x_1 e')=x_1\mu(e')=0$．これを用いると，$x=(x_1, x_2, \cdots)$ に対して $y=(0, x_2, x_3, \cdots)$ とすると，$\mu(x)=\mu(y)$ であることがわかる．また，$z=(x_2, x_3, \cdots)$ とすると，$z-y\in H$ なので $\mu(z-y)=0$，すなわち $\mu(z)=\mu(y)$ もいえる．よって，

$$\mu_n(x_n)=\mu(x)=\mu(y)=\mu(z)=\mu_n(x_{n+1})$$

となり，（2）がいえた．▨

このような μ は **Banach limit** とよばれている．Banach limit はつぎのような性質ももっている．

定理 1.5.4 (Banach limit の性質)　μ を Banach limit とする．このとき，$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^\infty$ に対して，

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \mu(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

が成り立つ．特に，$x_n\to a$ ならば $\mu(x)=a$ である．

証明　μ は Banach limit なので，自然数 m に対して

$$\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})=\cdots=\mu_n(x_{n+(m-1)})\geqq \inf_{m\leqq n} x_n.$$

よって，$\mu_n(x_n)\geqq \varliminf_{n\to\infty} x_n$．同様に，$\mu_n(x_{n+(m-1)})\leqq \sup_{m\leqq n} x_n$ $(m=1, 2, \cdots)$ であるので $\mu_n(x_n)\leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$．よって

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \mu(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

である．$x_n\to a$ のときは $\varliminf_{n\to\infty} x_n=\varlimsup_{n\to\infty} x_n=a$ なので $\mu(x)=a$ である．▨

注　l^∞ 上の線形汎関数 μ が，任意の $x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^\infty$ に対して，

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \mu(x) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

を満たせば，μ は mean，すなわち $\|\mu\|=\mu(e)=1$ を満たすことは明らかである．

つぎに Banach limit の概念を，一般の半群上に拡張することを試みよう．

S を半群(semigroup)とし，前と同様に $B(S)$ を S 上の有界な実数値関数全体のつくる Banach 空間とする．いま $B(S)$ 上の作用素 l_s, r_s $(s\in S)$ を $f\in B(S)$ に対し

$$(l_s f)(t)=f(st),\quad (r_s f)(t)=f(ts)\qquad (\forall t\in S)$$

で定義する．このとき，$B(S)$ 上の mean μ が，

$$\mu(f)=\mu(l_s f)\qquad (\forall f\in B(S),\ \forall s\in S)$$

を満たすならば，**左不変**，または **left invariant** であるといわれ，

$$\mu(f)=\mu(r_s f)\qquad (\forall f\in B(S),\ \forall s\in S)$$

を満たすならば，**右不変**，または **right invariant** であるといわれる．$B(S)$ 上の mean が左不変であり，かつ右不変なものを単に**不変**，または **invariant** とよぶ．S が可換な半群のときは，$B(S)$ 上に invariant mean が存在することが，つぎの Markov–角谷の不動点定理を使って証明できる．その前に定義を1つ与えておく．X を線形空間の凸集合とし，T を X から X への写像とする．このとき，T が**アフィン**(affine)であるとは，任意の $x, y\in X$ と $\alpha+\beta=1$ となる非負な数 α, β に対して，

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

がつねに成り立つときをいう．

定理 1.5.5 (Markov–角谷の不動点定理)　X を線形位相空間の空でないコンパクト凸集合とし，$\mathcal{S}$ を X から X へのアフィン連続写像からなる可換な半群とする．このとき，すべての $T\in\mathcal{S}$ に対して，$Tx_0=x_0$ となるような $x_0\in X$ が存在する．

証明　X の空でないコンパクト凸集合 C で，$\mathcal{S}$ のすべての元 T に対して，$TC\subset C$ となるようなものの全体を $\mathcal{C}$ とする．Zorn の補題を用いることにより $\mathcal{C}$ の中に極小な元が存在することがわかる．それを K_0 とする．いま $\mathcal{S}$ の有限個の元の凸結合の全体を $\mathrm{co}\,\mathcal{S}$ とする，すなわち

$$\mathrm{co}\,\mathcal{S}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i\colon\ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ T_1, T_2, \cdots, T_n\in\mathcal{S}\right\}$$

とすると，$\mathcal{S}$ が可換な半群であることより

$$RK_0=K_0\qquad (\forall R\in \mathrm{co}\,\mathcal{S})$$

となることがわかる．$x_0\in K_0$ とし，$T\in\mathcal{S}$ とする．また，

$$M_k=\frac{1}{k}(I+T+T^2+\cdots+T^{k-1})\qquad (\forall k\in \boldsymbol{N})$$

とすると，$M_k\in\mathrm{co}\,\mathcal{S}$ であるから，$x_0=M_k x_k$ となるような $x_k\in K_0$ が存在する．ゆえに

$$Tx_0 - x_0 = (TM_k - M_k)x_k$$
$$= \frac{1}{k}(T^k - I)x_k \in \frac{1}{k}(X - X) \qquad (\forall k \in \boldsymbol{N})$$

となり,

$$Tx_0 - x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(X - X) = \{0\}$$

である. よって, $Tx_0 = x_0$ となる. T は S の任意の元であるので定理の証明は完了する. ▨

定理 1.5.6 (invariant mean の存在) S を可換な半群とする. このとき, $B(S)^*$ の元 μ でつぎの条件を満たすものが存在する.

(1) $\|\mu\| = \mu(e) = 1$;

(2) $\mu(f) = \mu(r_s f) \qquad (\forall s \in S,\ \forall f \in B(S))$.

証明

$$B = \{\mu \in B(S)^* : \|\mu\| \leqq 1\}$$

とする. このとき, B は弱*コンパクトで凸集合である. いま,

$$X = \{\mu \in B : \|\mu\| = \mu(e) = 1\}$$

とすると, やはり X は弱*コンパクトで凸集合である. $s \in S$ に対して, $T_s = r_s^*$ (ただし, r_s^* は r_s の共役作用素を表す)とすると, T_s は X から X への弱*位相の意味で連続なアフィン写像であり,

$$T_s T_t = r_s^* r_t^* = r_{ts}^* = r_{st}^* = r_t^* r_s^* = T_t T_s$$

をも満たす. ここで, Markov–角谷の不動点定理を用いると

$$T_s \mu = \mu \qquad (\forall s \in S)$$

となる $\mu \in X$ が存在する. この μ に対して, $f \in B(S)$, $s \in S$ とすると

$$\mu(r_s f) = (r_s^* \mu)(f) = (T_s \mu)(f) = \mu(f)$$

となり, 定理が証明されたことになる. ▨

最後に位相をもった半群上で mean を考えることにしよう. Hausdorff 位相をもった半群 S がつぎの条件を満たすとき, **semitopological 半群**という.

任意の $a \in S$ に対して, S から S への写像

$$s \to s \cdot a, \qquad s \to a \cdot s$$

が連続である.

Semitopological 半群 S 上で定義された実数値有界連続関数の全体を $C(S)$ で表すと, $C(S)$ は Banach 空間 $B(S)$ の閉な線形部分空間となるからやはり Banach 空間である. $C(S)$ は e を含むので, $C(S)$ 上で mean を考えることができる. $\mu \in C(S)^*$ が mean であるための必要十分条件は, 定理 1.5.1 より

$$\inf_{s \in S} f(s) \leqq \mu(f) \leqq \sup_{s \in S} f(s) \qquad (\forall f \in C(s))$$

である．また $B(S)$ 上の作用素 l_s, r_s $(s\in S)$ を $C(S)$ 上に制限すると，l_s, r_s はともに $C(S)$ から $C(S)$ への線形連続作用素となることは明らかである．

そこで，$C(S)$ 上の mean μ が

$$\mu(f)=\mu(l_sf) \qquad (\forall f\in C(S),\ \forall s\in S)$$

を満たすとき，μ は $C(S)$ 上で**左不変**，または **left invariant** であるといわれ，

$$\mu(f)=\mu(r_sf) \qquad (\forall f\in C(S),\ \forall s\in S)$$

を満たすとき，μ は $C(S)$ 上で**右不変**，または **right invariant** であるといわれる．$C(S)$ 上の mean が left invariant であり，かつ right invariant であるとき，それは単に**不変**，または **invariant** であるといわれる．S に離散位相(discrete topolcgy)が入っているとき，$B(S)$ と $C(S)$ は同じものであるから，上で定義されたいろいろな mean の定義は前に定義されたものとまったく同じである．半群 S に位相を考えて，$B(S)$ の部分空間，例えば $C(S)$ 上で mean を考えるということは，狭い範囲で，left invariant mean や right invariant mean といった性質をもつ mean が存在しやすくなるということで，mean を使った議論がかなり一般的なところまでできるようになるということである．

定理 1.5.7 (invariant mean の性質)　μ を $C(S)$ 上の right invariant mean であるとする．このとき，任意の $f\in C(S)$ に対して，

$$\sup_s \inf_t f(ts) \leqq \mu(f) \leqq \inf_s \sup_t f(ts)$$

が成り立つ．また μ を $C(S)$ 上の left invariant mean とするとき，

$$\sup_s \inf_t f(st) \leqq \mu(f) \leqq \inf_s \sup_t f(st)$$

が成り立つ．

証明　μ を $C(S)$ 上の right invariant mean とする．このとき，μ は mean でもあるから，任意の $f\in C(S)$ と $s\in S$ に対して，

$$\inf_t (r_sf)(t) \leqq \mu(r_sf) \leqq \sup_t (r_sf)(t).$$

ここで，$\mu(r_sf)=\mu(f)$ であるから，

$$\inf_t f(ts) \leqq \mu(f) \leqq \sup_t f(ts)$$

となる．s は任意であるから，

$$\sup_s \inf_t f(ts) \leqq \mu(f) \leqq \inf_s \sup_t f(ts)$$

である．定理の後半も同様に証明できる．　▨

問　題 1.5

1. S を空でない集合とし，X を $B(S)$ の部分空間で 1 を含むものとする．このとき，X 上の線形汎関数 μ に対して (1°)，(2°)，(3°) は同値である．これを示せ．

(1°) $\|\mu\|=1=\mu(1)$ である;

(2°) $f\geqq 0$ ならば $\mu(f)\geqq 0$ であり，かつ $\mu(1)=1$ である;

(3°) $f\geqq 0$ ならば $\mu(f)\geqq 0$ であり，かつ $\|\mu\|=1$ である．

2. l^∞ の元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ に対して，$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$ が収束するような l^∞ の元 x の全体を X とする．すなわち，

$$X=\left\{x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^\infty\text{: } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ は収束する}\right\}$$

とする．このとき，X の元 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ に対して

$$\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

と定義すると，μ は X 上の線形汎関数で，$\mu(1)=1=\|\mu\|$ を満たす．これを示せ．

3. 2 で μ を Hahn–Banach の定理によって，l^∞ 上に拡張すると，その関数 μ_0 は Banach limit になる．これを示せ．

4. X を，局所凸線形位相空間 E のコンパクトな凸集合とし，T_1 と T_2 を X から X へのアフィン連続写像で，$T_1T_2=T_2T_1$ を満たすものとする．このとき，$\alpha+\beta=1$，$\alpha, \beta>0$ となる任意の α, β に対して，

$$F(T_1)\cap F(T_2)=F(\alpha T_1+\beta T_2)$$

となることを，Krein–Milman の定理(定理 1.2.19)から証明せよ．ただし，$F(T)$ は写像 T の不動点全体の集合を表す．

注　これからも，局所凸線形位相空間での Markov–角谷の不動点定理が証明できる．

5. $\{x_n\}, \{y_n\}\in l^\infty$ とし，$x_n-y_n\to 0$ とする．このとき，任意の Banach limit μ に対して，$\mu_n(x_n)=\mu_n(y_n)$ である．これを示せ．

2

Hilbert 空間における不動点理論

Banach 空間で非線形問題を取り扱うと難しく，複雑であることが多いが，Hilbert 空間で同じ問題を考えると，気持ちよく解けることが多い．それほど Hilbert 空間は非線形問題を取り扱う上でよい空間といえると思う．この章では，nonexpansive 写像の不動点定理と非線形エルゴード定理を主に取り扱うが，その“気持ちよさ”を十分味わっていただけたら幸いである．

2.1 Hilbert 空間での不動点定理

この節では，非線形関数解析学の立場から Hilbert 空間の性質を調べ，その後，nonexpansive 写像の不動点について考察する．

定理 2.1.1（最短距離定理の拡張定理） Hilbert 空間 H において，C を H の空でない閉凸集合とし，$\{x_i\}$ を H の有界な点列とする．また，この $\{x_i\}$ に対して，C 上の実数値関数 g を

$$g(z)=\overline{\lim_{i\to\infty}}\|x_i-z\| \qquad (\forall z\in C)$$

で定義する．このとき，

$$g(x_0)=\min\{g(z):\ z\in C\}$$

となるような $x_0\in C$ が一意に存在する．

証明 問題 1.3.4 によって，g は C 上で連続な凸関数となる．また，$\|z_n\|\to\infty$ のとき，$g(z_n)\to\infty$ であるから定理 1.3.10 を用いて，

$$g(x_0)=\min\{g(z):\ z\in C\}$$

となるような $x_0\in C$ が存在する．つぎに，このような x_0 が一意であることを示す．$r=g(x_0)=\overline{\lim_{i\to\infty}}\|x_i-x_0\|=0$ のときは，$x_i\to x_0$ となるから，このような

x_0 が一意であることは明らかである．そこで $r>0$ とする．y を x_0 と異なる $g(y)=\min\{g(z):\ z\in C\}=r$ となる C の元とする．$y\neq x_0$ であるから $\|y-x_0\|=\varepsilon>0$ とすると，$(r+a)^2-\dfrac{\varepsilon^2}{4}<r^2$ を満たすような正数 $a>0$ が存在する．

$$r=\overline{\lim_{i\to\infty}}\|x_i-x_0\|=\overline{\lim_{i\to\infty}}\|x_i-y\|$$

であるから，ある n_0 が存在して，$i\geqq n_0$ となるすべての i に対して

$$\|x_i-x_0\|<r+a,\qquad \|x_i-y\|<r+a$$

となるようにできる．ここで平行四辺形公式を用いると

$$4\left\|x_i-\frac{x_0+y}{2}\right\|^2+\|x_0-y\|^2=2\|x_i-x_0\|^2+2\|x_i-y\|^2$$

であるから

$$4\left\|x_i-\frac{x_0+y}{2}\right\|^2\leqq 2(r+a)^2+2(r+a)^2-\varepsilon^2.$$

よって，

$$\left\|x_i-\frac{x_0+y}{2}\right\|^2\leqq(r+a)^2-\frac{\varepsilon^2}{4}<r^2.$$

したがって

$$g\left(\frac{x_0+y}{2}\right)\leqq\sqrt{(r+a)^2-\frac{\varepsilon^2}{4}}<r$$

となり，これは $r=\min\{g(z):\ z\in C\}$ であることに反する．よって $x_0=y$ である． ▨

この定理において，$x_i=x$ $(i=1,2,\cdots)$ とすると，つぎのよく知られた最短距離定理になる．

定理 2.1.2 (最短距離定理) Hilbert 空間 H において，C を H の空でない閉凸集合とし，$x\in H$ とする．このとき，$\|x-y_0\|=d(x,C)$ となる C の点 y_0 が存在する．しかもこのような y_0 はただ1つである．

注 これまで最適化問題などで定理 2.1.2 がよく用いられていたが，著者は定理 2.1.1 のほうがより応用性の高い定理と考えている(問題 2.1.3 も参照せよ)．種々の分野で種種の形で定理 2.1.1 が用いられるであろうことを期待する．

Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合 C が与えられると，H の任意の点 x に対して，$\|x-x_0\|=d(x,C)$ となる C の元 x_0 が一意に決まるが，この H から C の上への写像のことを**距離射影**(metric projection)とよんでいる．この射影はもちろん非線形写像であるが，極めて有用な性質をもっている．それを示す前につぎの補助定理を証明しておく．

補助定理 2.1.3 C を Hilbert 空間 H の凸集合とし，$x\in H$ とする．この

とき，C の点 y が $\|x-y\|=d(x,C)$ となる必要十分条件は

$$(x-y,y-z)\geqq 0 \qquad (\forall z\in C)$$

が成り立つことである．

証明 $\|x-y\|=d(x,C)$ とする．z を C の任意の点とし，$0<\lambda<1$ とする．このとき，$\|x-y\|\leqq\|x-(1-\lambda)y-\lambda z\|$ であるから

$$\|x-y\|^2\leqq\|x-(1-\lambda)y-\lambda z\|^2=\|x-y+\lambda(y-z)\|^2$$
$$=\|x-y\|^2+2\lambda(x-y,y-z)+\lambda^2\|y-z\|^2.$$

よって，$2\lambda(x-y,y-z)\geqq-\lambda^2\|y-z\|^2$ となる．ここで $\lambda>0$ で割って，$\lambda\to 0$ とすると，$2(x-y,y-z)\geqq 0$ となり，$(x-y,y-z)\geqq 0$ を得る．

逆に，すべての $z\in C$ に対して，$(x-y,y-z)\geqq 0$ とすると，

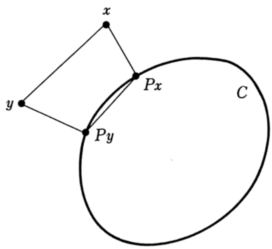
$$(x-y,y-x)+(x-y,x-z)\geqq 0.$$

これから

$$\|x-y\|^2\leqq(x-y,x-z)\leqq\|x-y\|\|x-z\|$$

となる．よって $\|x-y\|\leqq\|x-z\|$ となり，$\|x-y\|=d(x,C)$ を得る．▨

定理 2.1.4（距離射影の性質）C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする．このとき，H から C の上への距離射影 P はつぎの（i），（ii），（iii）の性質をもっている．



（i） P は H から C の上への写像で，$P^2=P$ である；

（ii） $\|Px-Py\|\leqq\|x-y\|$ $(\forall x,y\in H)$;

（iii） $x_n\rightharpoonup x_0$，$Px_n\to y_0\Longrightarrow Px_0=y_0$．

証明 （i） $x\in C$ のとき $Px=x$ であるから P は H から C の上への写像である．$x\in H$ のとき $Px\in C$ であるから $PPx=Px$ となり $P^2=P$ である．

（ii） 補助定理 2.1.3 より $(x-Px,Px-Py)\geqq 0$，$(y-Py,Py-Px)\geqq 0$ が成り立つ．よって，$(x-y-(Px-Py),Px-Py)\geqq 0$．これから

$$\|Px-Py\|^2\leqq(x-y,Px-Py)\leqq\|x-y\|\|Px-Py\|$$

となり，$\|Px-Py\|\leqq\|x-y\|$ を得る．

（iii）
$$(x_n-Px_n,Px_n-z)\geqq 0 \qquad (\forall z\in C)$$

であり，$x_n\rightharpoonup x_0$，$Px_n\to y_0$ であるから，問題 2.1.1 より

$$(x_0-y_0,y_0-z)\geqq 0 \qquad (\forall z\in C).$$

よって，補助定理 2.1.3 より $Px_0=y_0$ である．▨

$P^2=P$ を満たす写像 P は **retraction** といわれる．また，定理 2.1.4 の (iii) の性質をもっている写像は demiclosed であるといわれる．すなわち，一般に，C を Banach 空間 E の閉凸集合とするとき，写像 T: $C\to E$ が **demiclosed** であるとは，

$$x_n \rightharpoonup x_0,\quad Tx_n\to y_0 \Longrightarrow Tx_0=y_0$$

であるときをいう．

Hilbert 空間はまたつぎのような性質をもっている．

定理 2.1.5 (Hilbert 空間は Opial 条件を満たす)　Hilbert 空間において，$x_n \rightharpoonup x_0$ とし，$x_0\neq y$ とするならばつねに

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|<\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

が成り立つ．

証明　平行四辺形公式より

$$2\|x_n-x_0\|^2+2\|x_0-y\|^2=\|x_n-y\|^2+\|x_n-x_0-(x_0-y)\|^2.$$

これより

$$2\|x_n-x_0\|^2+2\|x_0-y\|^2=\|x_n-y\|^2+\|x_n-x_0\|^2 -2(x_n-x_0,x_0-y)+\|x_0-y\|^2.$$

整理すると

$$\|x_0-y\|^2+2(x_n-x_0,x_0-y)=\|x_n-y\|^2-\|x_n-x_0\|^2.$$

$\{x_n\}$ が x_0 に弱収束するので，十分大きな n に対して

$$\|x_n-y\|^2-\|x_n-x_0\|^2>0.$$

ゆえに $M=\sup_n\{\|x_n-x_0\|+\|x_n-y\|\}$ とすると

$$\|x_0-y\|^2+2(x_n-x_0,x_0-y)\leqq(\|x_n-y\|-\|x_n-x_0\|)M.$$

これから

$$\|x_0-y\|^2+2(x_n-x_0,x_0-y)+M\|x_n-x_0\|\leqq M\|x_n-y\|.$$

この両辺の下極限をとると

$$\|x_0-y\|^2+M\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|\leqq M\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

となる．したがって，

$$0<\|x_0-y\|^2\leqq M(\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|-\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|)$$

を得る．よって，$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|<\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$ である． ▨

Hilbert 空間のこの性質は Opial によって発見されたものであるが，これまであまり注目されていなかった．Banach 空間がこの条件を満たすとき，**Opial 条件**を満たすといわれる．

以上の準備のもとに，非線形関数解析学で重要な nonexpansive 写像について学んでみよう．C を Hilbert 空間 H の部分集合とするとき，C 上で定義され，H に値をとる写像 T が

$$\|Tx-Ty\|\leqq\|x-y\| \qquad (\forall x, y\in C)$$

を満たすならば，T は nonexpansive であるといわれた(p. 3 参照)．まず初めに nonexpansive 写像に対する不動点定理を証明してみよう．

定理 2.1.6 (nonexpansive 写像の不動点定理)　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，つぎの条件（1）と（2）は同値である．

（1）　T の不動点の集合 $F(T)$ は空でない;

（2）　C のある元 x に対して，$\{T^n x\}$ は有界である．

このとき，$F(T)$ は閉凸集合である．

証明　(1)⟹(2)：$F(T)$ の元を u とすると，$\{T^n u\}=\{u\}$ は有界である．

(2)⟹(1)：任意の $y\in C$ に対して，T は nonexpansive なので

$$\begin{aligned}0&\leqq\|T^k x-y\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2\\&=\|T^k x-Ty\|^2+2(T^k x-Ty, Ty-y)+\|Ty-y\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2\end{aligned}$$

である．上の式を $k=0$ から $k=n-1$ まで加えて n で割ると，

$$\begin{aligned}0\leqq\frac{1}{n}\|x-Ty\|^2&+2(S_n x-Ty, Ty-y)\\&+\|Ty-y\|^2-\frac{1}{n}\|T^n x-Ty\|^2\end{aligned}$$

となる．ここで，$S_n x=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}T^k x$ である．$\{T^n x\}$ は有界なので，$\{S_n x\}$ も有界となる．Hilbert 空間の有界集合は弱点列コンパクト(定理 1.2.14 を参照)なので，$\{S_n x\}$ の部分列で C の元 p に弱収束するものがあるから，上の不等式より

$$0\leqq 2(p-Ty, Ty-y)+\|Ty-y\|^2.$$

$y=p$ とすると，$Tp=p$ であることがわかる．これで（2）⟹（1）が証明された．

つぎに，$F(T)$ が閉集合であることを示す．$x_n\to x_0$，$x_n\in F(T)$ とすると，T の連続性より

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Tx_n=Tx_0$$

となり，$x_0\in F(T)$ がわかる．ゆえに $F(T)$ は閉である．$F(T)$ が凸集合

となることを示す．$x, y \in F(T)$ とし，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ とする．このとき，$z = \alpha x + (1-\alpha)y$ が T の不動点であることをいえばよい．$Tz \neq z$ としよう．平行四辺形公式より

$$\left\| \frac{z+Tz}{2} - x \right\|^2 + \frac{1}{4}\|z-Tz\|^2 = \frac{1}{2}\|z-x\|^2 + \frac{1}{2}\|Tz-x\|^2$$

である．T は nonexpansive であるので，上の等式より

$$\left\| \frac{z+Tz}{2} - x \right\|^2 \leqq \|z-x\|^2 - \frac{1}{4}\|z-Tz\|^2 < \|z-x\|^2$$

となる．同様に

$$\left\| \frac{z+Tz}{2} - y \right\|^2 \leqq \|z-y\|^2 - \frac{1}{4}\|z-Tz\|^2 < \|z-y\|^2.$$

よって，

$$\|x-y\| \leqq \left\| x - \frac{z+Tz}{2} \right\| + \left\| \frac{z+Tz}{2} - y \right\| < \|x-z\| + \|z-y\| = \|x-y\|.$$

これは矛盾である．よって $Tz = z$ である．ゆえに $F(T)$ は凸集合である． ▨

系 2.1.7 C を Hilbert 空間の有界で閉な凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，T は C の中に不動点をもつ．

証明 C は有界なので，C の任意の点 x に対して，$\{T^n x\}$ は有界となる．定理 2.1.6 によって，$F(T) \neq \phi$ となる． ▨

注 Hilbert 空間においてこの逆の命題，すなわち "C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とするとき，C 上で定義され，C に値をとるどんな nonexpansive 写像もつねに不動点をもつならば C は有界となる" という命題が真であるかという問題は，最近 Ray によって肯定的に解かれた(p. 56 を参照)．

問　題 2.1

1. Hilbert 空間 H において，

$$x_n \to x_0,\quad y_n \to y_0 \text{ ならば } (x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$$

となることを証明せよ．

2. C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする．このとき，$x \in H$ に対して，$\|x-y_0\| = d(x, C)$ となる C の点 y_0 が存在することを，つぎの (i), (ii) によって証明せよ．

(i) C の点列 $\{y_n\}$ で，$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = d(x, C)$ となるものがとれるが，この $\{y_n\}$ は Cauchy 列である．

(ii) (i)によって，$y_n \to y_0$ であるが，この点 y_0 が $d(x, y_0) = d(x, C)$ となる点である．

3.　最短距離定理の拡張定理(定理 2.1.1)を用いて，nonexpansive 写像の不動点定理(定理 2.1.6)を導け．

4.　Hilbert 空間 H において，C を H の空でない閉凸集合とし，$\{x_n\}$ を C の有界な点列とする．また μ を Banach limit とする．このとき，

$$\mu_n(x_n, y)=(x_0, y) \qquad (\forall y\in H)$$

となるような $x_0\in H$ が存在することを証明せよ．

5.　4 の x_0 は C の元であることを示せ．

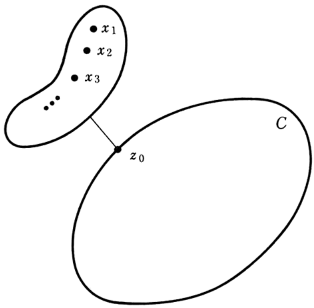
6.　Hilbert 空間 H において，C を H の空でない閉凸集合とし，$\{x_n\}$ を H の有界な点列とする．また μ を Banach limit とし，C 上の実数値関数 g を

$$g(z)=\mu_n\|x_n-z\|^2 \qquad (\forall z\in C)$$

で定義する．このとき，

$$g(z_0)=\min\{g(z):\ z\in C\}$$

となるような点 $z_0\in C$ が一意に存在する．これを示せ．



2.2 不動点への収束定理

これまでの節では不動点の存在を証明することが多かったが，この節では不動点の存在を仮定して，不動点を求める方法を2つ考える．1つはBrowderによって証明された強収束定理であり，他の1つは最近非線形関数解析学で話題となっている nonexpansive 写像の非線形エルゴード定理である．これらの収束定理はいろいろな形で拡張され，発展している(p.127 と p.67 を参照)．

定理 2.2.1 (Browder の強収束定理) C を Hilbert 空間 H の有界で閉な凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．また P を $F(T)$ の上への距離射影とするとき，つぎの (i), (ii) が成立する．

(i) 任意の $x_0 \in C$ に対して，C から C への写像 T_n を

$$T_n x = \left(1-\frac{1}{n}\right) Tx + \frac{1}{n} x_0 \qquad (n=2, 3, \cdots)$$

とすると，T_n は一意の不動点 u_n をもつ．

(ii) $n \to \infty$ としたとき，この u_n は $Px_0 \in F(T)$ に強収束する．

証明 (i) $n \geqq 2$ とし，$x, y \in C$ とする．

$$\|T_n x - T_n y\| \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-y\|$$

であるので，T_n は C 上の縮小写像であることがわかる．それゆえ，定理 1.1.3 より T_n の不動点 u_n が一意に存在する．これで (i) が示された．

(ii) $\{u_{n_i}\}$ を $\{u_n\}$ の任意の部分列とする．このとき，$\{u_{n_i}\}$ の部分列で $u_0 = Px_0$ に強収束するものをみつければよい．いま $v_i = u_{n_i}$ としよう．$\{v_i\}$ は有界なので，$\{v_i\}$ の部分列で C の元 v に弱収束するものがある．このとき，一般性を失うことなく v_i が v に弱収束すると仮定してもよい．この v が T の不動点であることは後で証明するとして，v_i が u_0 に強収束することを示そう．任意の i に対して v_i は T_{n_i} の不動点であるので

$$\frac{1}{n_i} v_i + \left(1-\frac{1}{n_i}\right)(v_i - Tv_i) = \frac{1}{n_i} x_0$$

であり，また u_0 は T の不動点なので

$$\frac{1}{n_i} u_0 + \left(1-\frac{1}{n_i}\right)(u_0 - Tu_0) = \frac{1}{n_i} u_0.$$

$U = I - T$ (ただし I は恒等写像)とすると

$$\frac{1}{n_i}(v_i - u_0, v_i - u_0) + \left(1-\frac{1}{n_i}\right)(Uv_i - Uu_0, v_i - u_0)$$

$$=\frac{1}{n_i}(x_0-u_0, v_i-u_0)$$

となり，$(Uv_i-Uu_0, v_i-u_0)\geqq 0$ なので

$$\frac{1}{n_i}\|v_i-u_0\|^2\leqq\frac{1}{n_i}(x_0-u_0, v_i-u_0).$$

よって

$$\|v_i-u_0\|^2\leqq(x_0-u_0, v_i-u_0)$$
$$=(x_0-u_0, v_i-v)+(x_0-u_0, v-u_0)$$

を得る．ここで $u_0=Px_0$，$v\in F(T)$ なので $(x_0-u_0, v-u_0)\leqq 0$ である．

ゆえに

$$\|v_i-u_0\|^2\leqq(x_0-u_0, v_i-v)$$

となる．v_i は v に弱収束するから，v_i は u_0 に強収束することがわかる．

さて，v が T の不動点であることを示す．$v_i-Tv_i\to 0$ (問題 2.2.1) なので，いま $v\neq Tv$ とすると，Opial の定理(定理 2.1.5) より

$$\varliminf_{i\to\infty}\|v_i-v\|<\varliminf_{i\to\infty}\|v_i-Tv\|$$
$$=\varliminf_{i\to\infty}\|Tv_i-Tv\|$$
$$\leqq\varliminf_{i\to\infty}\|v_i-v\|$$

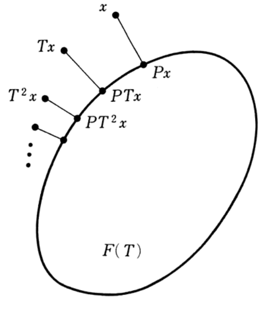
となり，矛盾を得る．それゆえ，$Tv=v$ である．▨

つぎに非線形エルゴード定理を証明する．その定理を証明する上で，つぎの補助定理は本質的な役割を演じる．

補助定理 2.2.2　C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．$F(T)\neq\phi$ を仮定し，P を $F(T)$ の上への距離射影とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，PT^nx は強収束する．

証明　$x\in C$ とする．P が $F(T)$ の上への距離射影であることより

$$\|PT^nx-T^nx\|$$
$$\leqq\|PT^{n-1}x-T^nx\|$$
$$=\|TPT^{n-1}x-T^nx\|$$
$$\leqq\|PT^{n-1}x-T^{n-1}x\|.$$



それゆえ，$\{\|PT^nx-T^nx\|\}$ は単調減少列であることがわかる．さらに C の元 v と $F(T)$ の元 u に対して，P の性質より

$$(v-Pv, Pv-u)\geqq 0,$$

すなわち,

$$\|v-Pv\|^2 \leqq (v-Pv, v-u).$$

それゆえ,

$$\begin{aligned}\|Pv-u\|^2 &= \|Pv-v+v-u\|^2 \\ &= \|Pv-v\|^2-2(Pv-v, u-v)+\|v-u\|^2 \\ &\leqq \|v-u\|^2-\|Pv-v\|^2.\end{aligned}$$

いま $v=T^{n+k}x$, $u=PT^nx$ とおくと

$$\begin{aligned}\|PT^{n+k}x-PT^nx\|^2 &\leqq \|T^{n+k}x-PT^nx\|^2-\|PT^{n+k}x-T^{n+k}x\|^2 \\ &\leqq \|T^nx-PT^nx\|^2-\|PT^{n+k}x-T^{n+k}x\|^2\end{aligned}$$

となり, $\{\|T^nx-PT^nx\|\}$ が単調減少であることより, $\{PT^nx\}$ は Cauchy 列になることがわかる. それゆえ PT^nx は強収束する. ▨

これを用いると Baillon の非線形エルゴード定理が簡単に証明できる.

定理 2.2.3 (Baillon の非線形エルゴード定理) C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし, T を C から C への nonexpansive 写像とする. このとき, つぎの (1) と (2) の条件は同値である.

(1) $F(T) \neq \phi$ である;

(2) 任意の $x \in C$ に対して, $S_nx=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^kx$ は弱収束する.

このとき, $x \in C$ に対して,

$$Qx = \text{w-}\lim_{n\to\infty} S_nx$$

とおくと, Q は C から $F(T)$ の上への $Q^2=Q$ となる nonexpansive 写像で,

$$QT^n = T^nQ = Q \qquad (n=1,2,\cdots),$$
$$Qx \in \overline{\text{co}}\{T^nx : n=0,1,2,\cdots\} \qquad (\forall x \in C)$$

を満たしている. ただし, $\overline{\text{co}}\,A$ は A の凸包の閉包である.

証明 (1)$\Longrightarrow$(2): $x \in C$ とする. 補助定理2.2.2より, $\{PT^nx\}$ は $F(T)$ の元 p に強収束する. $\{S_nx\}$ は有界であるから, その部分列で弱収束するものがある. そこで, いまそのような部分列の極限がすべて p であることがいえれば (2) が証明されたことになる. $u \in F(T)$ に対して, P の性質から

$$(T^kx-PT^kx, PT^kx-u) \geqq 0.$$

これと $\{\|T^kx-PT^kx\|\}$ が単調減少であることを用いると

$$\begin{aligned}(u-p, T^kx-PT^kx) &\leqq (PT^kx-p, T^kx-PT^kx) \\ &\leqq \|PT^kx-p\|\|T^kx-PT^kx\|\end{aligned}$$

$$\leqq \|PT^kx-p\|\|x-Px\|.$$

上の式を $k=0$ から $k=n-1$ まで加えて n で割ると

$$\left(u-p, S_nx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}PT^kx\right)\leqq\frac{\|x-Px\|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|PT^kx-p\|.$$

PT^kx が p に強収束することより，もし $S_{n_k}x$ が v に弱収束すると仮定すると

$$(u-p, v-p)\leqq 0.$$

定理 2.1.6 の証明からわかるように $v\in F(T)$ なので $u=v$ とおくと，$v=p$ を得る．

(2)⟹(1) は S_nx が弱収束するという仮定を使えば，定理 2.1.6 の証明とまったく同様にできるので省略する．

つぎに定理の後半を証明する．$x, y\in C$ に対して，

$$\begin{aligned}(S_nx-S_ny, Qx-Qy)&\leqq\|S_nx-S_ny\|\|Qx-Qy\|\\&\leqq\|x-y\|\|Qx-Qy\|\end{aligned}$$

であるから，$n\to\infty$ とすると

$$\|Qx-Qy\|^2\leqq\|x-y\|\|Qx-Qy\|.$$

これは Q が nonexpansive であることを意味する．また任意の $x\in C$ に対して

$$S_nTx-S_nx=\frac{1}{n}(T^nx-x)$$

であるから，$n\to\infty$ とすると $QTx-Qx=0$ となり，$QT=Q$ となる．$TQ=Q$ は明らか．その他も明らかである．▨

注　この定理で S_nx の収束は弱収束ということであるが，S_nx が強収束するためには写像 T にもう少し条件がいる．このままの仮定では強収束しない例がつくれる．

Baillon の非線形エルゴード定理では，$\{T^nx\}$ の平均収束，すなわち，$\{S_nx\}$ の収束性を問題にしたが，$\{T^nx\}$ それ自身の収束性はどうなっているのであろうか．つぎの定理はそれに答えるものである．

定理 2.2.4 (T^nx の収束)　C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，T を C 上の nonexpansive 写像とする．このとき，$x\in C$ に対してつぎの (1) と (2) は同値である．

(1)　$\{T^nx\}$ は弱収束する；

(2)　$F(T)\neq\phi$ であり，かつ $\{T^nx\}$ の部分列 $\{T^{n_i}x\}$ が y に弱収束するならば，$y\in F(T)$ である．

証明　(1)⟹(2)：$T^nx\rightharpoonup x_0$ としよう．このとき，$Tx_0=x_0$ である．なぜならば，$Tx_0\neq x_0$ とすると定理 2.1.5 より，

$$\varliminf_{n\to\infty}\|T^nx-x_0\|<\varliminf_{n\to\infty}\|T^nx-Tx_0\|$$

$$\leqq \varliminf_{n\to\infty} \|T^{n-1}x - x_0\|$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} \|T^n x - x_0\|$$

となり，これは矛盾である．

（2）⟹（1）：$F(T)$ は空でないから，$\{T^n x\}$ は有界である．それゆえ，その部分列 $\{T^{n_i}x\}$ で C の元 y に弱収束するものがある．一方，$F(T)$ の上への距離射影を P とすると，補助定理 2.2.2 より，$PT^n x$ は $F(T)$ の元 z に強収束する．P は demiclosed である（定理 2.1.4）から $Py=z$ を得る．ところで仮定より，$y\in F(T)$ であるので $y=z$ となり，これは $\{T^n x\}$ が z に弱収束することを意味する．▨

補助定理 2.2.5　C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，$I-T$ は demiclosed である．

証明　$x_n \rightharpoonup x_0$ とし，$(I-T)x_n \to y_0$ とする．このとき，$(I-T)x_0=y_0$ をいえばよい．もし，$x_0 \neq y_0+Tx_0$ とすると

$$\varliminf_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx_0\| \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|$$
$$< \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - (y_0 + Tx_0)\|$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n - y_0 + Tx_n - Tx_0\|$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx_0\|$$

となり，矛盾を得る．よって $x_0=y_0+Tx_0$ である．▨

この補助定理と定理 2.2.4 を使うと，つぎの定理が得られる．

定理 2.2.6　C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．もし $F(T)\neq\phi$ で，$x\in C$ に対して，$n\to\infty$ のとき，$T^n x - T^{n+1}x \to 0$ ならば，$T^n x$ は $F(T)$ の元に弱収束する．

証明　$\{T^n x\}$ が弱収束するということを示すためには，$F(T)\neq\phi$ であるので，$T^{n_i}x \rightharpoonup y$ と仮定して，$y\in F(T)$ をいえばよい．仮定より

$$T^n x - T^{n+1}x = (I-T)\,T^n x \to 0$$

であるので，補助定理 2.2.5 を使うと $(I-T)y=0$ を得る．すなわち，$Ty=y$ である．ここで定理 2.2.4 を使うと，$\{T^n x\}$ は $F(T)$ の元に弱収束することがわかる．▨

問　題 2.2

1. C を Hilbert 空間 H の有界で閉な凸集合とし，$x_0 \in C$ とする．また T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，$n=2, 3, \cdots$ に対して

$$T_n x = \left(1 - \frac{1}{n}\right) Tx + \frac{1}{n} x_0 \qquad (\forall x \in C)$$

によって一意に定まる T_n の不動点を x_n とすると，$x_n - Tx_n \to 0$ である．これを示せ．

2. 系 2.1.7 を 1 の結果と補助定理 2.2.5 を使って証明せよ．

3. C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，$x \in C$ とする．また T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，つぎの条件（1）と（2）は同値である．これを示せ．

（1） $T^n x$ は強収束する;

（2） $F(T) \neq \phi$ であり，かつ $\{T^n x\}$ の中に強収束する部分列がとれる．また，$T^{n_i} x \to p$ ならば $p \in F(T)$ である．

2.3 Ray の定理

§2.1で，Hilbert空間 H の空でない閉凸集合 C が与えられたとき，C 上で定義され，C の中に値をとるどんな nonexpansive 写像も，つねに不動点をもつならば，C は有界となるか，という問題が提起されたが，この節ではその問題に対する解答を与える．

Hilbert空間 H の部分集合 K が与えられたとき，H の任意の直線と K との交わりがつねに有界であるならば，K は**線形的に有界**であるという．また，H の部分集合 K が **admissible** であるとは，K が空でない閉凸集合であって，線形的に有界ではあるが，ノルムの意味では有界でないときをいう．

H の部分集合 K と $y\in H$, $\mu\in(0,1)$ に対して，つぎの集合を定義する．

$$C(y,\mu,K)=\{w\in K:\ \mu\|y\|^2\leqq(w,y)\leqq\|y\|^2\},$$
$$E(y,\mu,K)=\{w\in K:\ \mu\|y\|^2=(w,y)\}.$$

補助定理 2.3.1 K を H の admissible な集合とし，$y\in K$ とする．このとき，

$$\|y\|>d(0,K)$$

ならば，任意の $\mu\in(0,1)$ に対して，$C(y,\mu,K)$ は admissible である．

証明 $C(y,\mu,K)$ が空でない閉凸集合で，線形的に有界であることは明らかであるから，$C(y,\mu,K)$ が非有界であることを示そう．

$\|x_n\|\to\infty$ となる K の元からなる点列を $\{x_n\}$ とし，$R>0$ とする．そして，$\|\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\|=R$ となるような非負な数列 $\{\lambda_n\}$ を選ぶ．$\|x_n-y\|\to\infty$ であるから，$\lambda_n\to 0$ となり，それゆえ，十分大きな n に対して，

$$\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\in K.$$

$\{\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\}$ は H の有界な点列なので，弱位相の意味で収束する部分列を含まなければならない．これを改めて $\{\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\}$ とかき，$\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\rightharpoonup w_0$ と仮定する．K は弱位相の意味で閉であり，十分大きい n に対しては，$\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\in K$ であるので，$w_0\in K$ である．つぎに $w_0=y$ であることを示す．このために $r>0$ を固定し，$rw_0+(1-r)y$ を考える．十分大きな N をとり，$n\geqq N$ ならば $r\lambda_n\leqq 1$ となるようにすると，$\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\rightharpoonup w_0$ であるので，$w_0\in\overline{\text{co}}\{\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y:\ n\geqq N\}$ である．このようにして，

$$\begin{aligned} rw_0+(1-r)y&\in\overline{\text{co}}\{r(\lambda_n(x_n-y)+y)+(1-r)y:\ n\geqq N\}\\ &=\overline{\text{co}}\{r\lambda_n(x_n-y)+y:\ n\geqq N\}\end{aligned}$$

$$=\overline{\mathrm{co}}\{r\lambda_n x_n+(1-r\lambda_n)y:\ n\geqq N\}\subset K$$

となる．これは，$w_0\neq y$ ならば K が線形的に有界であることに反する．このようにして，$\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y\to y$ である．よって任意の $R>0$ と $\varepsilon>0$ に対して，

$$\|w\|=R,\qquad \|y\|^2-\varepsilon<(w,y)<\|y\|^2+\varepsilon$$

となるような $w\in K$ を選ぶことができる．証明は，任意の $R>0$ と $\varepsilon>0$ に対して

$$\|w\|\geqq R,\qquad \|y\|^2-\varepsilon\leqq(w,y)\leqq\|y\|^2$$

となるような $w\in K$ の存在を示すことによって完了する．

u を $\|u\|=d(0,K)$ となる K の元としよう．そして，$\varepsilon_n\to 0$ となる数列 $\{\varepsilon_n\}$ を $\left(0,\dfrac{1}{2}(\|y\|^2-\|u\|\|y\|)\right)$ の中から選ぼう．

$$\mu_n=\frac{\varepsilon_n}{\|y\|^2-\|y\|\|u\|+\varepsilon_n}$$

とおくと，$\mu_n\in(0,1)$ かつ $\mu_n\to 0$ である．いま，

$$\|w_n\|=R'>R,\qquad \|y\|^2-\varepsilon_n\leqq(w_n,y)\leqq\|y\|^2+\varepsilon_n$$

となるような点列 $\{w_n\}\subset K$ を選び，$z_n=(1-\mu_n)w_n+\mu_n u$ とおくと，

$$z_n\in K,\qquad \|z_n\|\to R'>R.$$

さらに

$$\begin{aligned}(z_n,y)&=((1-\mu_n)w_n,y)+\mu_n(u,y)\\&\leqq(1-\mu_n)(\|y\|^2+\varepsilon_n)+\mu_n\|u\|\|y\|\\&=\|y\|^2-\mu_n(\|y\|^2-\|u\|\|y\|+\varepsilon_n)+\varepsilon_n=\|y\|^2,\end{aligned}$$

すなわち，$(z_n,y)\leqq\|y\|^2$ となる．明らかに $(z_n,y)\to\|y\|^2$ である．ゆえに，$R>0$ と $\varepsilon>0$ が与えられたとき，十分大きな n をとると，

$$\|z_n\|\geqq R,\qquad \|y\|^2-\varepsilon\leqq(z_n,y)\leqq\|y\|^2$$

となる $z_n\in K$ を選ぶことができる．これは補助定理 2.3.1 の証明を完了する．▨

補助定理 2.3.2　K を H の admissible な集合，$\mu\in(0,1)$，u を $\|u\|=d(0,K)$ となる K の元としよう．このとき，$y\in K$，$\|y\|>\dfrac{\|u\|}{\mu}$ ならば，$E(y,\mu,K)$ は admissible な集合である．

証明　$\alpha=(u,y)$ としよう．このとき，

$$\mu\|y\|^2-\alpha\geqq\mu\|y\|^2-\|u\|\|y\|>\|u\|\|y\|-\|u\|\|y\|=0$$

である．$M>0$ を固定しよう．補助定理 2.3.1 によって

$$\|w\|\geqq\left(\frac{\|y\|^2-\alpha}{\mu\|y\|^2-\alpha}\right)(M+\|u\|),\qquad \|y\|^2\geqq(w,y)=r\|y\|^2\geqq\mu\|y\|^2$$

となるような $w\in K$ を選ぶことができる．

$$\lambda=\frac{\mu\|y\|^2-\alpha}{r\|y\|^2-\alpha}$$

とすると，$r\geqq\mu$ なので，$\lambda\leqq 1$ となる．$r\leqq 1$ なので，

$$\lambda\geqq\frac{\mu\|y\|^2-\alpha}{\|y\|^2-\alpha}>0. \tag{$*$}$$

いま，$v=\lambda w+(1-\lambda)u$ とおくと，$\lambda\in(0,1]$ なので，$v\in K$ となる．$\|v\|\geqq M$, $v\in E(y,\mu,K)$ を示そう．まず，

$$\begin{aligned}(v,y)&=(\lambda w+(1-\lambda)u,y)=\lambda(w,y)+(1-\lambda)(u,y)\\&=\lambda r\|y\|^2+(1-\lambda)\alpha=\lambda r\|y\|^2+\frac{(r-\mu)\|y\|^2\alpha}{r\|y\|^2-\alpha}\\&=\frac{r\mu\|y\|^2-r\alpha+(r-\mu)\alpha}{r\|y\|^2-\alpha}\|y\|^2=\mu\|y\|^2,\end{aligned}$$

すなわち，$(v,y)=\mu\|y\|^2$ である．最後に，$(*)$ と $\|w\|$ の選び方から

$$\begin{aligned}\|v\|&=\|\lambda w+(1-\lambda)u\|\geqq\lambda\|w\|-(1-\lambda)\|u\|\\&\geqq\frac{\mu\|y\|^2-\alpha}{\|y\|^2-\alpha}\|w\|-\|u\|\geqq M+\|u\|-\|u\|=M.\end{aligned}$$

このようにして，$E(y,\mu,K)$ は非有界であることがわかる．$E(y,\mu,K)$ は明らかに閉凸集合で，線形的に有界であるので，補助定理 2.3.2 は証明されたことになる． ▨

補助定理 2.3.3 K を H の閉凸集合とし，$0\in K$ とする．また，$\{y_n\}$ は任意の n に対して，$\sum_{j=1}^{n} y_j\in K$ となるような H の点列とする．$\{\lambda_n\}$ を 1 によって上からおさえられる非負な数からなる単調減少な数列とするならば，任意の n に対して，$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j\in K$ となる．

証明 $\lambda_1\in[0,1]$ に対して，$\lambda_1 y_1\in K$ であることは明らかである．いま定理が，$\{y_1,y_2,\cdots,y_{m-1}\}$ と 1 によって上からおさえられる単調減少な数列 $\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{m-1}\}$ について成り立ったとしよう．

$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$ を 1 によって上からおさえられる単調減少な数列としよう．一般性を失うことなく，$\lambda_1>\lambda_m$ を仮定できる．すると，

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_j=\lambda_1\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j}{\lambda_1}y_j=\lambda_1\left\{\frac{\lambda_1-\lambda_m}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_1-\lambda_m}y_j\right)+\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{m}y_j\right\}.$$

$\lambda_j\geqq\lambda_{j+1}$ であるので，

$$\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_1-\lambda_m}\geqq\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_m}{\lambda_1-\lambda_m}.$$

ゆえに仮定より

$$x=\sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_1-\lambda_m}y_j\right)\in K, \qquad x^1=\sum_{j=1}^{m}y_j\in K$$

となることがわかる．よって，

$$\lambda_1\left(\frac{\lambda_1-\lambda_m}{\lambda_1}x+\lambda_m\frac{x^1}{\lambda_1}\right)\in K$$

である．したがって，$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_j\in K$ である．　▨

この結果より，ただちにつぎの系が得られる．

系 2.3.4　K を H の閉凸集合とし，$0\in K$ とする．$\{y_n\}$ を，任意の n に対して，$\sum_{j=1}^{n}y_j\in K$ となるような正規直交系とする．このとき，

$$K_0=\{w\in\overline{\mathrm{sp}}\{y_1,y_2,\cdots\}:\ 1\geqq(w,y_1)\geqq(w,y_2)\geqq\cdots\geqq 0\}$$

とするならば，K_0 は K の閉凸集合である．ただし，$\overline{\mathrm{sp}}\,A$ は A を含む最小の閉部分空間を表す．

以上の準備のもとにつぎの 2 つの定理を証明する．

定理 2.3.5　K を H の admissible な集合としよう．このとき，$0\in K$ ならば，任意の n に対して，$\sum_{j=1}^{n}e_j\in K$ となるような正規直交系 $\{e_n\}\subset H$ が存在する．

証明　$\mu\in(0,1)$ とし，$\|y_1\|\geqq\dfrac{1}{\mu}$ となるように $y_1\in K$ を選ぼう．$K_1=E(y_1,\mu,K)$ とし，u_1 を $\|u_1\|=d(0,K_1)$ となるような K_1 の元とする．補助定理 2.3.2 より K_1 は admissible であるので，

$$\|w_1\|>\frac{\|u_1\|}{\mu}, \qquad \|w_1\|\geqq(\mu+1)\|y_1\|$$

となるように $w_1\in K_1$ を選ぶことができる．

$$y_2=w_1-\frac{(w_1,y_1)y_1}{\|y_1\|^2}$$

とおくと，$(y_2,y_1)=0$ であり，$\|y_2\|\geqq\|y_1\|$，$w_1=\mu y_1+y_2$ でもある．さらに，

$$\lambda_2=\frac{\mu\|y_2\|^2+\mu^2\|y_1\|^2}{\|y_2\|^2+\mu^2\|y_1\|^2}$$

とするならば，$K_2=E(w_1,\lambda_2,K_1)$ は admissible となる．実際，

$$\frac{\|u_1\|}{\lambda_2}=\frac{\|u_1\|}{\mu}\left(\frac{\|y_2\|^2+\mu^2\|y_1\|^2}{\|y_2\|^2+\mu\|y_1\|^2}\right)<\frac{\|u_1\|}{\mu}<\|w_1\|$$

であるので，補助定理 2.3.2 により K_2 は admissible である．また $w\in K_2$ ならば，

$$(w,y_1)=\mu\|y_1\|^2$$

であり，$(w,y_2)=\mu\|y_2\|^2$ である．$(w,y_2)=\mu\|y_2\|^2$ であることは

$$(w, y_2)+\mu^2\|y_1\|^2=(w, y_2)+(w, \mu y_1)=(w, w_1)$$
$$=\lambda_2\|w_1\|^2=\lambda_2(\|y_2\|^2+\mu^2\|y_1\|^2)$$
$$=\mu\|y_2\|^2+\mu^2\|y_1\|^2$$

よりわかる．いまや，$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ が定義できたとしよう．そして，

$$\lambda_1=\mu, \qquad \lambda_j=\frac{\mu\|y_j\|^2+\mu^2\sum_{m=1}^{j-1}\|y_m\|^2}{\|y_j\|^2+\mu^2\sum_{m=1}^{j-1}\|y_m\|^2} \quad (j=2, 3, \cdots, n)$$

とおき，

$$w_0=y_1, \qquad w_j=y_{j+1}+\mu\sum_{m=1}^{j}y_m \quad (j=1, 2, \cdots, n-1)$$

とおくと，つぎの（i），（ii），（iii），（iv），（v）が成り立つと仮定できる．

（i） $\|y_1\|\leqq\|y_2\|\leqq\cdots\leqq\|y_n\|$;

（ii） $(y_i, y_j)=0$ $(j\neq i)$;

（iii） $K_j=E(w_{j-1}, \lambda_j, K_{j-1})$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ は admissible であり，K_j は $\|u_j\|=d(0, K_j)$ となるような $u_j\in K_j$ をもつ（ただし，$K_0=K$）;

（iv） $w_j\in K_j$ $(j=0, 1, \cdots, n-1)$ であり，$\|w_j\|>\dfrac{\|u_j\|}{\mu}$ である;

（v） $w\in K_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ で，$j=1, 2, \cdots, i$ ならば $(w, y_j)=\mu\|y_j\|^2$．

帰納法の仮定によって，K_n は admissible である．いま u_n を $\|u_n\|=d(0, K_n)$ となるような K_n の元とし，$w_n\in K_n$ を

$$\|w_n\|>\frac{\|u_n\|}{\mu}, \qquad \|w_n\|\geqq(n\mu+1)\|y_n\|$$

を満たすようにとる．そして，

$$y_{n+1}=w_n-\sum_{j=1}^{n}\frac{(w_n, y_j)}{\|y_j\|^2}y_j$$

とすると，

$$(y_{n+1}, y_i)=(w_n, y_i)-\sum_{j=1}^{n}\frac{(w_n, y_j)}{\|y_j\|^2}(y_j, y_i)$$
$$=(w_n, y_i)-\frac{(w_n, y_i)}{\|y_i\|^2}\|y_i\|^2=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

となり，

$$\|y_{n+1}\|\geqq\|w_n\|-\sum_{j=1}^{n}\mu\|y_j\|\geqq(n\mu+1)\|y_n\|-n\mu\|y_n\|=\|y_n\|$$

である．また，$(w_n, y_j)=\mu\|y_j\|^2$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ であるので，

$$w_n = y_{n+1} + \mu \sum_{j=1}^{n} y_j$$

である．

$$\lambda_{n+1} = \frac{\mu\|y_{n+1}\|^2 + \mu^2 \sum_{m=1}^{n} \|y_m\|^2}{\|y_{n+1}\|^2 + \mu^2 \sum_{m=1}^{n} \|y_m\|^2}$$

とし，$K_{n+1} = E(w_n, \lambda_{n+1}, K_n)$ とすると，K_{n+1} は admissible である．実際，

$$\frac{\|u_n\|}{\lambda_{n+1}} = \frac{\|u_n\|}{\mu}\left(\frac{\|y_{n+1}\|^2 + \mu^2 \sum_{m=1}^{n} \|y_m\|^2}{\|y_{n+1}\|^2 + \mu \sum_{m=1}^{n} \|y_m\|^2}\right) < \frac{\|u_n\|}{\mu} < \|w_n\|$$

であるから，補助定理 2.3.2 より K_{n+1} は admissible である．

最後に，$w \in K_{n+1} \subset K_n$ ならば，仮定より $(w, y_j) = \mu\|y_j\|^2$ $(j=1,2,\cdots,n)$ であり，$(w, y_{n+1}) = \mu\|y_{n+1}\|^2$ であることは，

$$\begin{aligned}(w, y_{n+1}) + \mu^2 \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^2 &= (w, y_{n+1}) + \mu \sum_{j=1}^{n} (w, y_j) \\ &= \left(w, y_{n+1} + \mu \sum_{j=1}^{n} y_j\right) = (w, w_n) \\ &= \lambda_{n+1}\|w_n\|^2 = \mu\|y_{n+1}\|^2 + \mu^2 \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^2\end{aligned}$$

よりわかる．

このようにして，つぎの条件を満たすような直交系 $\{y_n\} \subset H$ をつくることができる．

（1） $y_1 \in K$, $y_n + \mu \sum_{j=1}^{n-1} y_j \in K$ $(n=2,3,\cdots)$;

（2） $\|y_1\| \leqq \|y_2\| \leqq \cdots \leqq \|y_n\| \leqq \cdots$.

いまや数学的帰納法と補助定理 2.3.3 を使うことによって，任意の n に対して，$\sum_{j=1}^{n} \mu y_j \in K$ であることがわかる．また $e_j = \frac{\mu y_j}{\|\mu y_j\|}$ として，補助定理 2.3.3 を使えば，$\sum_{j=1}^{n} e_j \in K$ もわかる．これは定理 2.3.5 の証明を完了する．▨

この定理と系 2.3.4 を用いると，この節の目的であるつぎの定理が得られる．

定理 2.3.6 (Ray の定理)　C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする．このとき，C 上で定義され，C の中に値をとるどんな nonexpansive 写像も不動点をもつならば，C は有界である．

証明　C は有界でないとする．一般性を失うことなく，C が線形的に有界

で，$0 \in C$ であるとしてよい(問題 2.3.1)．定理 2.3.5 によって，正規直交系 $\{e_j\}$ をとり，$\{e_j\}$ で張られる閉部分空間を H^1 としよう．系 2.3.4 より

$$K_0 = \{w \in H^1 \colon 1 \geqq (w, e_1) \geqq (w, e_2) \geqq \cdots \geqq 0\}$$

とすると K_0 は C の閉凸集合である．また $w = \sum_{j=1}^{\infty}(w, e_j)e_j \in K_0$ に対して，

$$F(w) = e_1 + \sum_{j=1}^{\infty}(w, e_j)e_{j+1}$$

を定義すれば，F は K_0 から K_0 への nonexpansive 写像(実際，等距離写像)である(問題 2.3.2)．しかも F は不動点をもたない．P を H から K_0 の上への距離射影とし，$T = FP$ とすると，T は C から C への nonexpansive 写像で，不動点をもたない写像である． ▨

注 Ray の定理だけを得るならば，これほど多くの紙面を必要としないはずである．しかしながらこの節での議論は Schmidt の直交化定理など重要な定理と大いに関わりがあるので，今後の発展につながることが非常に多いと思われる．

問 題 2.3

1. C を Hilbert 空間 H の線形的に有界でない閉凸集合とする．このとき，C から C への nonexpansive 写像 T で $F(T) = \phi$ となるものが存在することを証明せよ．

2. 定理 2.3.6 の証明の中の

$$F(w) = e_1 + \sum_{j=1}^{\infty}(w, e_j)e_{j+1}$$

が等距離写像であることを示せ．

3. l^2 で，$e_1 = (1, 0, 0, \cdots), e_2 = (0, 1, 0, \cdots), \cdots$ とすると

$$\overline{\mathrm{co}}\{ne_n \colon n = 1, 2, \cdots\}$$

は admissible な集合である．これを示せ．

2.4 非可換半群の不動点定理

この節では，nonexpansive 写像の非可換半群に対する不動点定理を 2 つ証明する．1 つは left invariant mean が存在するような半群に対する不動点定理であり，他の 1 つは left reversible (p. 62 を参照)とよばれる半群に対する不動点定理である．この 2 つの半群はともに可換な半群を拡張したものであるから，可換な半群に対する不動点定理はもちろんこれら 2 つの不動点定理のどの場合からも得られる．

まず初めに，left invariant mean をもつような半群に対する不動点定理から証明してみよう．その前に mean に関する議論を Hilbert 空間上で少ししておきたい．

C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．また，S を semitopological な半群とする．いま，u を S から C への連続写像で，$\sup_{s\in S}\|u(s)\|<\infty$ となるものとする．このとき，任意の $y\in H$ に対して，

$$\varphi(t)=(u(t),y) \qquad (\forall t\in S)$$

で定義される S 上の関数 φ は $C(S)$ の元となる．$C(S)$ 上の mean μ に対して H 上の線形汎関数 g を

$$g(y)=\mu(\varphi)=\mu_t(u(t),y) \qquad (\forall y\in H)$$

で定義する．このとき，

$$\begin{aligned}|g(y)|=|\mu(\varphi)|&\leqq\|\mu\|\|\varphi\|=\|\varphi\|\\&=\sup_{t\in S}|\varphi(t)|\\&=\sup_{t\in S}|(u(t),y)|\\&\leqq(\sup_{t\in S}\|u(t)\|)\cdot\|y\|\end{aligned}$$

となるから，g は有界でもある．よって Riesz の定理により

$$g(y)=(x_0,y) \qquad (\forall y\in H)$$

となる $x_0\in H$ が一意に存在する．すなわち，

$$\mu_t(u(t),y)=(x_0,y) \qquad (\forall y\in H)$$

となる $x_0\in H$ が一意に存在する．

補助定理 2.4.1

$$x_0\in\overline{\mathrm{co}}\{u(t):\ t\in S\}\subset C$$

である．

証明　$x_0\notin\overline{\mathrm{co}}\{u(t):\ t\in S\}=A$ とすると，分離定理(定理 1.2.5)より

$$(x_0, y_0) < \inf\{(z, y_0):\ z \in A\}$$

となるような $y_0 \in H$ が存在する．ところが μ は mean であるから

$$\begin{aligned}\inf\{(u(t), y_0):\ t \in S\} &\leqq \mu_t(u(t), y_0)\\ &= (x_0, y_0)\\ &< \inf\{(z, y_0):\ z \in A\}\\ &\leqq \inf\{(u(t), y_0):\ t \in S\}\end{aligned}$$

となり，これは矛盾である．すなわち，

$$x_0 \in \overline{\mathrm{co}}\{u(t):\ t \in S\} \subset C$$

である． ▨

いまやこの補助定理を用いて非可換半群に対する最初の不動点定理を証明することができる．

つぎの定義は後に Banach 空間のときもよく使うので，その場合で定義しておく．

C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，S を semitopological な半群とする．このとき C 上で定義された写像の族

$$\mathcal{S} = \{T_t:\ t \in S\}$$

がつぎの（1），（2），（3）の条件を満たすならば，$\mathcal{S} = \{T_t:\ t \in S\}$ は C から C への **nonexpansive 写像による S の連続表現**であるという．

（1） $T_t:\ C \to C$，かつ

$$\|T_t x - T_t y\| \leqq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C, \forall t \in S);$$

（2） $T_{ts} = T_t T_s$ $(\forall t, s \in S)$;

（3） 任意の $x \in C$ に対して，$g(t) = T_t x$ は t の関数として連続である．すなわち，$t_\alpha \to t$ となるネット $\{t_\alpha\}$ に対して $\|T_{t_\alpha} x - T_t x\| \to 0$ となることである．

T_s $(s \in S)$ の共通不動点全体の集合を $F(\mathcal{S})$ で表す．

定理 2.4.2（高橋の非可換半群の不動点定理） S を semitopological 半群，C を Hilbert 空間 H の閉凸集合，

$$\mathcal{S} = \{T_t:\ t \in S\}$$

を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする．このとき，$C(S)$ が left invariant mean をもつならば，つぎの命題は同値である．

（1） ある $x \in C$ に対して，$\{T_t x:\ t \in S\}$ は有界である；

（2） すべての $x \in C$ に対して，$\{T_t x:\ t \in S\}$ は有界である；

（3） $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ である．すなわち，$T_t x = x$ $(\forall t \in S)$ となるような $x \in C$ が

存在する．

証明　まず，(1)⟹(3) を証明する．μ を $C(S)$ 上の left invariant mean とする．$\{T_tx\colon t\in S\}$ は有界であることより，$u(t)=T_tx$ とすると，u は S から C への連続写像で，$\sup_{t\in S}\|u(t)\|<\infty$ となる関数である．そこで，

$$\mu_t(T_tx,y)=\mu_t(u(t),y)=(x_0,y)\qquad(\forall y\in H)$$

となるような

$$x_0\in\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}\subset C$$

が存在する．この点 x_0 が T_t $(t\in S)$ の共通不動点であることを以下で示そう．$s\in S$ と $t\in S$ に対して，

$$\begin{aligned}0&\leqq\|T_tx-x_0\|^2-\|T_{st}x-T_sx_0\|^2\\&=\|T_tx-T_sx_0\|^2+2(T_tx-T_sx_0,T_sx_0-x_0)\\&\quad+\|T_sx_0-x_0\|^2-\|T_{st}x-T_sx_0\|^2.\end{aligned}$$

よって left invariant mean μ を両辺に作用させると

$$\begin{aligned}0&\leqq\mu_t(\|T_tx-T_sx_0\|^2+2(T_tx-T_sx_0,T_sx_0-x_0)\\&\quad+\|T_sx_0-x_0\|^2-\|T_{st}x-T_sx_0\|^2)\\&=\mu_t\|T_tx-T_sx_0\|^2+2(x_0-T_sx_0,T_sx_0-x_0)\\&\quad+\|T_sx_0-x_0\|^2-\mu_t\|T_tx-T_sx_0\|^2\\&=-\|x_0-T_sx_0\|^2.\end{aligned}$$

ゆえに，すべての $s\in S$ に対して，$T_sx_0=x_0$ である．

(3)⟹(2)：$x_0\in F(\mathcal{S})$ とする．すると任意の $x\in C$ に対して，

$$\|T_tx-x_0\|=\|T_tx-T_tx_0\|\leqq\|x-x_0\|\qquad(\forall t\in S).$$

よって，$\{T_tx\}$ は有界である．

(2)⟹(1) は明らかである．▨

定理 2.4.2 の証明からもわかるように，C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現 $\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ に対して，$F(\mathcal{S})\neq\phi$ ならば，

$$\{T_tx\colon t\in S\}\subset C$$

はすべての $x\in C$ に対して有界となる．そこで，任意の $x\in C$ と $C(S)$ 上の mean μ に対して，

$$\mu_t(T_tx,y)=(x_0,y)\qquad(\forall y\in H)$$

となるような

$$x_0\in\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}\subset C$$

が一意に存在するが，いま任意の $x\in C$ に対して，このような x_0 を対応させる写像を改めて T_μ とすると，すなわち，

$$\mu_t(T_t x, y) = (T_\mu x, y) \qquad (\forall y \in H)$$

とすると，つぎの命題が成立する．

定理 2.4.3 S を semitopological な半群，C を Hilbert 空間 H の閉凸集合，

$$\mathcal{S} = \{T_t :\ t \in S\}$$

を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする．$F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とし，μ を $C(S)$ 上の invariant mean とするならば，この μ によって定まる作用素 T_μ はつぎの性質をもつ．

(i) $T_\mu T_t = T_t T_\mu = T_\mu \ (\forall t \in S)$;

(ii) T_μ は C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction である．すなわち，$\|T_\mu x - T_\mu y\| \leqq \|x - y\| \ (x, y \in C)$ であり，$T_\mu{}^2 = T_\mu$ である;

(iii) $T_\mu x \in \overline{\mathrm{co}}\{T_t x :\ t \in S\} \ (\forall x \in C)$.

証明 (i) 定理 2.4.2 の (1)⟹(3) の証明と T_μ の定義により，T_μ は C から $F(\mathcal{S})$ の上への写像となるので，

$$T_t T_\mu = T_\mu \qquad (\forall t \in S).$$

また μ は right invariant mean でもあるから，任意の $s \in S$ と $x \in C$ に対して

$$\begin{aligned}(T_\mu T_s x, y) &= \mu_t(T_t T_s x, y) = \mu_t(T_{ts} x, y)\\ &= \mu_t(T_t x, y) = (T_\mu x, y) \qquad (\forall y \in H).\end{aligned}$$

よって，$T_\mu T_s x = T_\mu x$ となる．これは

$$T_\mu T_t = T_\mu \qquad (\forall t \in S)$$

を意味する．

(ii) T_μ が nonexpansive であることは，任意の $x, y \in C$ に対して

$$\begin{aligned}\|T_\mu x - T_\mu y\|^2 &= (T_\mu x - T_\mu y,\ T_\mu x - T_\mu y)\\ &= \mu_t(T_t x - T_t y,\ T_\mu x - T_\mu y)\\ &\leqq \|\mu\| \cdot \sup_{t \in S} |(T_t x - T_t y,\ T_\mu x - T_\mu y)|\\ &\leqq \sup_{t \in S}(\|T_t x - T_t y\| \cdot \|T_\mu x - T_\mu y\|)\\ &\leqq \|x - y\| \cdot \|T_\mu x - T_\mu y\|\end{aligned}$$

となることよりわかる．$T_\mu{}^2 = T_\mu$ であることは，任意の $y \in H$ に対して，

$$\begin{aligned}(T_\mu{}^2 x, y) &= \mu_t(T_t T_\mu x, y) = \mu_t(T_\mu x, y)\\ &= (T_\mu x, y)\end{aligned}$$

であることよりわかる．

(iii) $T_\mu x \in \overline{\mathrm{co}}\{T_t x :\ t \in S\}$ となることは T_μ の定義より明らか． ▨

注 定理 2.4.3 のような retraction を **ergodic retraction** とよぶこともある．

非可換半群に対するもう1つの不動点定理を証明してみよう．

S を semitopological 半群とする．このような S が **left reversible** であるとは，S の2つの閉な右イデアルがつねに空でない共通部分をもつときをいう．S の元 a, b に対して，

$$\{a\} \cup \overline{aS} \supseteq \{b\} \cup \overline{bS}$$

が成り立つとき，$a \leqq b$ とすれば，$(S, \leqq)$ は有向集合(問題 2.4.1)になる．同様にして，S の2つの閉な左イデアルがつねに空でない共通部分をもつとき，S は **right reversible** であるといわれる．S の元 $a, b \in S$ に対して

$$\{a\} \cup \overline{Sa} \supseteq \{b\} \cup \overline{Sb}$$

が成り立つとき，$a \leqq b$ とすれば，やはり $(S, \leqq)$ は有向集合となる．可換な半群 S は，S の元 a, b に対して，つねに

$$ab = ba$$

となるので，left reversible にも，right reversible にもなる．

定理 2.4.4 (非可換半群の不動点定理)　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，S を left reversible な semitopological 半群とする．$\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とし，C のある元 x に対して

$$\{T_s x : s \in S\}$$

が有界であるとする．このとき，すべての $s \in S$ に対して，

$$T_s x_0 = x_0$$

となるような $x_0 \in C$ が存在する．

証明　C の元 x に対して，$\{T_s x : s \in S\}$ は有界であるので，C 上の実数値関数 g を

$$g(z) = \overline{\lim_t} \| T_t x - z \| \qquad (\forall z \in C)$$

で定義すると，g は C 上で連続な凸関数となる(問題 2.4.2)．また，$\|z_n\| \to \infty$ のとき，$g(z_n) \to \infty$ でもあるから，定理 1.3.10 を用いて，

$$g(x_0) = \min\{g(z) : z \in C\}$$

となるような $x_0 \in C$ が存在する．このような x_0 が一意であることは，定理 2.1.1 の証明と同じようにしてわかる(問題 2.4.3)．いまこの x_0 に対して，

$$\begin{aligned} g(T_s x_0) &= \overline{\lim_t} \| T_t x - T_s x_0 \| \\ &= \overline{\lim_t} \| T_s T_t x - T_s x_0 \| \\ &\leqq \overline{\lim_t} \| T_t x - x_0 \| = g(x_0) \qquad (\forall s \in S) \end{aligned}$$

であるから，$T_s x_0 = x_0$ $(s \in S)$ となり，$x_0 \in C$ は T_s $(s \in S)$ の共通な不動点で

ある．▨

問　題 2.4

1.　Semitopological な半群 S が left reversible であるとする．また S の元 a,b に対して，

$$\{a\}\cup\overline{aS}\supseteq\{b\}\cup\overline{bS}$$

ならば，$a\leqq b$ と定義する．このとき $(S,\leqq)$ は有向集合となる．

2.　H を Hilbert 空間とし，C をその閉凸集合とする．また $\{x_\alpha\}$ を H の有界なネットとする．このとき

$$g(z)=\overline{\lim_{\alpha}}\|x_\alpha-z\| \qquad (\forall z\in C)$$

で定義される C 上の実数値関数 g は連続で凸な関数となる．

3.　2 において

$$M=\{u\in C\colon\ g(u)=\min_{z\in C}g(z)\}$$

とすると，M は 1 点からなる集合である．

4.　C を Hilbert 空間 H の有界な閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{T_\alpha\colon\ \alpha\in I\}$ を C 上の nonexpansive 写像からなる可換な族とする．このとき，つぎの方法により T_α $(\alpha\in I)$ の共通な不動点が存在することを証明せよ．

（i）　任意の $\alpha\in I$ に対して，$F(T_\alpha)\neq\phi$ である；

（ii）　n 個の $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset I$ に対して，$\bigcap_{i=1}^{n}F(T_{\alpha_i})\neq\phi$ である；

（iii）　T_α $(\alpha\in I)$ は共通の不動点をもつ．

2.5　一般化された非線形エルゴード定理

この節では，§2.2 で得られた Baillon の非線形エルゴード定理をもっと一般的な形のエルゴード定理として証明してみよう．

まず初めに 1 つの定義を与える．S を semitopological な半群とし，f を $C(S)$ の元とする．このとき，$c \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$s \to \infty_R \text{ ならば } f(s) \to c \qquad (*)$$

であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $w \in S$ が存在して

$$|f(tw) - c| < \varepsilon \qquad (\forall t \in S)$$

が成り立つときをいう．

注　$S = \boldsymbol{N}$ のときに $(*)$ が意味するものは，有界な数列 $\{x_n\}$ が c に収束することに他ならない．

補助定理 2.5.1　$f \in C(S)$ と $c \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$s \to \infty_R \text{ ならば } f(s) \to c$$

であるとき，$C(S)$ 上の right invariant mean μ に対して，

$$\mu(f) = c.$$

証明　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $w \in S$ が存在して

$$|f(tw) - c| < \varepsilon \qquad (\forall t \in S)$$

であるから，

$$\begin{aligned} |\mu(f) - c| &= |\mu_t(f(t)) - c| \\ &= |\mu_t(f(tw)) - c| \\ &\leqq \|\mu\| \cdot \sup_{t \in S} |f(tw) - c| \leqq \varepsilon \end{aligned}$$

となる．$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\mu(f) = c$ である．　▨

注　この命題は Banach limit μ に対して，$x_n \to a$ ならば $\mu(x) = a$ であることの拡張である(定理 1.5.4)．

補助定理 2.5.2　$f \in C(S)$ とする．このとき，

$$f(ts) \leqq f(s) \qquad (\forall t, s \in S)$$

が成り立つならば

$$t \to \infty_R \text{ のとき，} f(t) \to \inf_{s \in S} f(s).$$

証明　$c = \inf_{s \in S} f(s)$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$f(s) < c + \varepsilon$$

となるような $s \in S$ が存在する．仮定より，すべての $t \in S$ に対して

$$f(ts) \leqq f(s)$$

であるので，

$$|f(ts)-c| = f(ts)-c \leqq f(s)-c < \varepsilon$$

となる．よって，

$$t \to \infty_R \text{ ならば } f(t) \to c = \inf_{s \in S} f(s). \qquad ▨$$

つぎの補助定理はこの節の主定理を証明する上で本質的なものである．

補助定理 2.5.3 S を semitopological な半群とし，C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とする．$\mathcal{S}=\{T_t\colon t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とし，$F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．このとき，$C(S)$ 上の invariant mean μ と λ に対して，$T_\mu = T_\lambda$ が成り立つ．

証明 $x \in C$ を固定する．$F(\mathcal{S})$ は空でない閉凸集合なので，C から $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影 P が存在する．するとその性質より

$$(a-Pa, b-Pa) \leqq 0 \qquad (\forall a \in C, \forall b \in F(\mathcal{S}))$$

が成り立つ．いま

$$g(t) = \|PT_t x - T_t x\|^2 \qquad (\forall t \in S)$$

とすると，$g \in C(S)$ である．また，$t, s \in S$ に対して，

$$\begin{aligned} g(s) &= \|PT_s x - T_s x\|^2 \\ &\geqq \|T_t PT_s x - T_t T_s x\|^2 \\ &= \|PT_s x - T_{ts} x\|^2 \\ &= \|PT_s x - PT_{ts} x\|^2 + \|PT_{ts} x - T_{ts} x\|^2 \\ &\quad + 2(PT_s x - PT_{ts} x, PT_{ts} x - T_{ts} x) \end{aligned}$$

であり，さらに

$$(PT_s x - PT_{ts} x, PT_{ts} x - T_{ts} x) \geqq 0$$

であるので

$$g(s) - \|PT_{ts} x - T_{ts} x\|^2 \geqq \|PT_s x - PT_{ts} x\|^2 \geqq 0. \qquad (**)$$

よって，

$$g(s) \geqq g(ts) \qquad (\forall t, s \in S).$$

ゆえに補助定理 2.5.2 より

$$t \to \infty_R \text{ ならば } g(t) \to \inf_{s \in S} g(s)$$

が成り立つ．ここで $C(S)$ 上の invariant mean μ に対して

$$\mu_t(PT_t x, y) = (q, y) \qquad (\forall y \in H)$$

とすると，

$$\mu_t(PT_{ts} x, y) = \mu_t(PT_t x, y) = (q, y) \qquad (\forall y \in H)$$

となる．補助定理 2.4.1 より

$$q\in\overline{\mathrm{co}}\{PT_{ts}x:\ t\in S\}\qquad(\forall s\in S).\qquad(***)$$

また (**) より

$$\|PT_sx-PT_{ts}x\|^2\leqq g(s)-\inf_{w\in S}g(w)\qquad(\forall s\in S).$$

よって (***) を用いると

$$\|PT_sx-q\|^2\leqq g(s)-\inf_{w\in S}g(w)\qquad(\forall s\in S).$$

ゆえに,

$$s\to\infty_R \text{ ならば } \|PT_sx-q\|\to 0.$$

補助定理 2.5.1 を用いると，$C(S)$ 上の invariant mean λ に対して

$$\lambda_t(PT_tx,y)=(q,y)\qquad(\forall y\in H)$$

である．この定理の証明を完了させるためには，$C(S)$ 上の任意の invariant mean λ に対して，$T_\lambda x=q$ をいえばよい．

$C(S)$ 上の任意の invariant mean λ に対して，定理 2.4.3 より

$$T_\lambda x\in F(S)$$

であるので

$$(PT_tx-T_tx,PT_tx-T_\lambda x)\leqq 0\qquad(\forall t\in S)$$

となる．これより

$$\begin{aligned}(PT_tx-T_tx,q-T_\lambda x)&\leqq(PT_tx-T_tx,q-PT_tx)\\&\leqq\|PT_tx-T_tx\|\|q-PT_tx\|\qquad(\forall t\in S).\end{aligned}$$

$F(S)\neq\phi$ より $\{T_tx:\ t\in S\}$ と $\{PT_tx:\ t\in S\}$ は有界であるので，ある $M>0$ が存在して，上の式は

$$(PT_tx-T_tx,q-T_\lambda x)\leqq M\|q-PT_tx\|$$

となる．よって

$$\lambda_t(PT_tx-T_tx,q-T_\lambda x)\leqq M\lambda_t\|q-PT_tx\|.$$

また,

$$t\to\infty_R \text{ ならば } \|q-PT_tx\|\to 0$$

であるので，$\lambda_t\|q-PT_tx\|=0$ である．よって

$$\lambda_t(PT_tx-T_tx,q-T_\lambda x)\leqq 0.$$

ゆえに

$$(q-T_\lambda x,q-T_\lambda x)\leqq 0$$

となる．よって $\|q-T_\lambda x\|^2\leqq 0$ である．これは $q=T_\lambda x$ を意味する．これで補助定理の証明は完了する．▨

いよいよこの節の主定理を証明することができる．その前に定義を 1 つ与え

ておく.

$C(S)$ 上の mean のネット $\{\mu_\alpha\colon \alpha\in I\}$ が**漸近的に不変**であるとは，任意の $f\in C(S)$ と $s\in S$ に対して，

$$\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(l_s f)\to 0,$$
$$\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(r_s f)\to 0$$

が成り立つことである.

例えば，$S=\{0,1,2,\cdots\}$ とし，$x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in B(S)$ に対して，

$$\mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とすると，$\{\mu_n\}$ は $B(S)$ 上の漸近的に不変な mean のネットである(p. 70 を参照).

定理 2.5.4 S を semitopological な半群，C を Hilbert 空間 H の閉凸集合，

$$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$$

を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする. $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とし，$\{\mu_\alpha\}$ を $C(S)$ 上の漸近的に不変な mean のネットとする. このとき，任意の $x\in C$ に対して，$F(\mathcal{S})$ の元 x_0 が存在して，

$$T_{\mu_\alpha}x\to x_0$$

である. このとき，$x_0=Qx$ ($\forall x\in C$) とすると，Q はつぎの条件 (i)，(ii) を満たす C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction である.

(i) $QT_t=T_tQ=Q$ ($\forall t\in S$);

(ii) $Qx\in\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}$ ($\forall x\in C$).

証明 μ_α は mean であるから，$\|\mu_\alpha\|=1$ である. ゆえに，$\{\mu_\alpha\colon \alpha\in I\}$ は弱* 位相の意味で収積点をもつ. それを μ とすると，μ は $C(S)$ 上の invariant mean になる. 実際，mean の全体

$$\{\lambda\in C(S)^*\colon \lambda(1)=\|\lambda\|=1\}$$

は弱*位相で閉集合(問題 2.5.3)なので，μ は mean となることは明らかである. μ が left invariant であり，かつ right invariant であることを示す. 仮定より任意の $\varepsilon>0$, $f\in C(S)$, $s\in S$ に対し，ある $\alpha_0\in I$ が存在して

$$|\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(l_s f)|\leqq\frac{\varepsilon}{3} \qquad (\forall\alpha\geqq\alpha_0)$$

となるようにできる. また，μ は $\{\mu_\alpha\colon \alpha\in I\}$ の収積点であるので，この α_0 に対して，

$$|\mu_\alpha(f)-\mu(f)|\leqq\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\mu_\alpha(l_sf)-\mu(l_sf)|\leqq\frac{\varepsilon}{3}$$

となるような α ($\geqq\alpha_0$) を選ぶことができる．すると，この α に対して

$$\begin{aligned}|\mu(f)-\mu(l_sf)|&\leqq|\mu(f)-\mu_\alpha(f)|+|\mu_\alpha(f)-\mu_\alpha(l_sf)|\\&\quad+|\mu_\alpha(l_sf)-\mu(l_sf)|\\&\leqq\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意であるから

$$\mu(f)=\mu(l_sf)\qquad({}^\forall f\in C(S),\ {}^\forall s\in S).$$

同様に，μ が right invariant であることもわかる．

$Q=T_\mu$ とすると，定理 2.4.3 より Q は C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction で，(i), (ii) の条件を満たすことは既に証明済みであるので，任意の $x\in C$ に対して，

$$T_{\mu_\alpha}x\rightharpoonup Qx$$

であることのみを示そう．

$\{T_{\mu_\alpha}x:\ \alpha\in I\}$ はネットであり，C の有界な集合であるから，その部分ネット $\{T_{\mu_{\alpha_\beta}}x\}$ で，C の元 x_0 に弱収束するものがある．いま $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$ の収積点を λ とすると，この λ は $\{\mu_\alpha:\ \alpha\in I\}$ の収積点でもあるから，λ は invariant mean であり，さらに $y\in H$ に対して

$$\lambda_t(T_tx,y)=(x_0,y)$$

を満たす．よって，$T_\lambda x=x_0$ である．補助定理 2.5.3 より，$T_\mu=T_\lambda=Q$ であるから，$x_0=Qx$ であり，$T_{\mu_\alpha}x\rightharpoonup x_0$ であることがわかる．　▨

注　この定理において，漸近的に不変な mean のネット $\{\mu_\alpha:\ \alpha\in I\}$ がいかなる場合でも，$\{T_{\mu_\alpha}x\}$ の弱収束する点 x_0 は同じである．

注　定理 2.5.4 は Banach 空間のときは解けていない．

問 題 2.5

1.　S を可換な semitopological な半群とし，$f\in C(S)$ とする．このとき，$c\in\boldsymbol{R}$ に対し，

$$s\to\infty_R \text{ ならば } f(s)\to c$$

であるための必要十分条件は

$$\sup_w\inf_t f(tw)=\inf_w\sup_t f(tw)=c$$

となることである．これを示せ．

2.　S が可換であるときの補助定理 2.5.2 を 1 を用いて証明せよ．

3.　S を位相空間とする．このとき，$C(S)$ 上の mean の全体

$$M=\{\mu\in C(S)^*:\ \mu(1)=\|\mu\|=1\}$$

は弱*位相で閉集合である．

4.　定理 2.5.4 において，任意の $x\in C$ に対して

$$Qx\in\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_{ts}x:\ t\in S\}$$

である．これを示せ．

2.6 種々の非線形エルゴード定理

この節では，定理 2.5.4 を使っていくつかの非線形エルゴード定理を証明してみよう．まず初めに，§2.2 で既に得られた非線形エルゴード定理 (p. 47)を定理 2.5.4 を用いて証明してみよう．

$S=\{0,1,2,\cdots\}$ とする．いま $f=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in B(S)$ に対して，

$$\mu_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k \qquad (n=1,2,\cdots)$$

とすると，μ_n は mean である．実際，μ_n は線形である．また任意の $f\in B(S)$ に対して，

$$|\mu_n(f)|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|f\|=\|f\|$$

であり，かつ $\mu_n(1)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1=1$ であるから，

$$\|\mu_n\|=\mu_n(1)=1 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

つぎに，$f=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in B(S)$ と $m\in S$ に対して，

$$\begin{aligned}|\mu_n(f)-\mu_n(r_mf)|&=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+m}\right|\\&\leqq\frac{1}{n}\cdot 2m\|f\|\to 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから，$\{\mu_n\}$ は漸近的に不変な mean の列である．また，$x\in C$ と $y\in H$ に対して

$$\begin{aligned}(\mu_n)_k(T^kx,y)&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(T^kx,y)\\&=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx,y\right)\end{aligned}$$

であるから，$T_{\mu_n}x=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$ である．したがって定理 2.5.4 を使うと

$$T_{\mu_n}x=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$$

は $F(T)$ の元 x_0 に弱収束する．

定理 2.6.1 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像で，$F(T)\neq\phi$ となるものとする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，

$$S_r x=(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x \qquad (r\uparrow 1)$$

は $F(T)$ の元 x_0 に弱収束する.

証明 $S=\{0,1,2,\cdots\}$ とする. $f=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in B(S)$ と $0<r<1$ に対して,

$$\mu_r(f)=(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k$$

とすると, $\{\mu_r\colon 0<r<1\}$ は $B(S)$ 上の漸近的に不変な mean のネットとなる. 実際, 任意の $f=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in B(S)$ に対して,

$$\begin{aligned}|\mu_r(f)|&=(1-r)\left|\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k\right|\\ &\leqq(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k\|f\|\\ &=(1-r)\frac{1}{1-r}\|f\|=\|f\|\end{aligned}$$

であり, かつ

$$\mu_r(1)=(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k=(1-r)\frac{1}{1-r}=1$$

であるから, $\|\mu_r\|=\mu_r(1)=1$ $(0<r<1)$ である. つぎに, $m\in S$ に対して

$$\begin{aligned}|\mu_r(f)-\mu_r(r_m f)|&=\left|(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_k-(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_{k+m}\right|\\ &=\left|(1-r)\sum_{k=0}^{m-1} r^k x_k-(1-r^m)(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k x_{k+m}\right|\\ &\leqq(1-r^m)\|f\|+(1-r^m)\|f\|\\ &=2(1-r^m)\|f\|\to 0 \qquad (r\uparrow 1)\end{aligned}$$

であるから, $\{\mu_r\colon 0<r<1\}$ は漸近的に不変な mean のネットである. また,

$$\begin{aligned}(\mu_r)_k(T^k x,y)&=(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k(T^k x,y)\\ &=\left((1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x,y\right)\end{aligned}$$

より, $T_{\mu_r}x=(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x$ である. したがって定理 2.5.4 を使って,

$$(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^k T^k x$$

は, $r\uparrow 1$ のとき, $F(T)$ の元 x_0 に弱収束する. ▨

つぎに, $S=\boldsymbol{R}^+=\{t\in\boldsymbol{R}\colon 0\leqq t<\infty\}$ の場合を考えてみよう.

Hilbert 空間 H の閉凸集合 C 上で定義された写像の族

$$\mathcal{S}=\{S(t):\ 0\leqq t<\infty\}$$

がつぎの 4 つの条件を満たすとき，それは C 上の **nonexpansive 半群**であるといわれる．

（1） $S(t+s)x=S(t)S(s)x\ \ (\forall x\in C,\ \forall t, s\in \boldsymbol{R}^+)$;

（2） $S(0)x=x\ \ (\forall x\in C)$;

（3） 任意の $x\in C$ に対して，$S(t)x$ は t に関して連続である;

（4） $S(t):\ C\to C$ であり，

$$\|S(t)x-S(t)y\|\leqq\|x-y\| \qquad (\forall x, y\in C, \forall t\in \boldsymbol{R}^+)$$

である．

このとき，つぎの非線形エルゴード定理が成立する．

定理 2.6.2　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，

$$\mathcal{S}=\{S(t):\ 0\leqq t<\infty\}$$

を C 上の nonexpansive 半群とする．また $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，

$$S_\lambda x=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt \qquad (\lambda\to\infty)$$

は $F(\mathcal{S})$ の元 x_0 に弱収束する．

証明　$S=\boldsymbol{R}^+$ とする．$f\in C(\boldsymbol{R}^+)$ と $\lambda>0$ に対して，

$$\mu_\lambda(f)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)dt$$

とする．すると，$\{\mu_\lambda:\ 0<\lambda<\infty\}$ は $C(\boldsymbol{R}^+)$ 上の漸近的に不変な mean のネットになる．まず μ_λ が mean であることを示す．任意の $f\in C(\boldsymbol{R}^+)$ に対して，

$$|\mu_\lambda(f)|=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)dt\right|\leqq\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda\|f\|\,dt=\|f\|$$

であり，かつ $\mu_\lambda(1)=\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^\lambda 1\,dt=1$ であるから，$\|\mu_\lambda\|=\mu_\lambda(1)=1$ である．よって，μ_λ は mean である．つぎに，$h\in\boldsymbol{R}^+$ に対して

$$\begin{aligned}|\mu_\lambda(f)-\mu_\lambda(r_h f)|&=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)dt-\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t+h)dt\right|\\&=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(t)dt-\frac{1}{\lambda}\int_h^{\lambda+h} f(t)dt\right|\\&=\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^h f(t)dt-\frac{1}{\lambda}\int_\lambda^{\lambda+h} f(t)dt\right|\\&\leqq\frac{2\|f\|\cdot h}{\lambda}\to 0 \qquad (\lambda\to\infty)\end{aligned}$$

より，$\{\mu_\lambda\colon 0<\lambda<\infty\}$ は漸近的に不変な mean のネットとなる．また，$x\in C$ と $y\in H$ に対して，

$$(\mu_\lambda)_t(S(t)x, y)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda (S(t)x, y)dt$$
$$=\left(\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt, y\right)^{\dagger}$$

であるから，$T_{\mu_\lambda}x=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$ である．よって定理 2.5.4 を使えば

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$$

は $F(\mathcal{S})$ の元 x_0 に弱収束する．▨

同様にして，nonexpansive 半群に対するつぎの非線形エルゴード定理も証明できる．

定理 2.6.3 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{S(t)\colon 0\leqq t<\infty\}$ を C 上の nonexpansive 半群とする．また $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，

$$r\int_0^\infty e^{-rt}S(t)x\,dt \qquad (r\downarrow 0)$$

は $F(\mathcal{S})$ の元 x_0 に弱収束する．

証明 $S=\boldsymbol{R}^+$ とする．$f\in C(S)$ と $r>0$ に対して

$$\mu_r(f)=r\int_0^\infty e^{-rt}f(t)dt$$

とすると，$\{\mu_r\colon 0<r<\infty\}$ は $C(S)$ 上の漸近的に不変な mean のネットである．まず μ_λ が mean であることを示す．任意の $f\in C(\boldsymbol{R}^+)$ に対して，

$$|\mu_r(f)|=\left|r\int_0^\infty e^{-rt}f(t)dt\right|$$
$$\leqq r\int_0^\infty e^{-rt}\|f\|\,dt=\|f\|$$

であり，

$$\mu_r(1)=r\int_0^\infty e^{-rt}\cdot 1\,dt=1$$

であるから，$\|\mu_r\|=\mu_r(1)=1$ である．よって，μ_r は mean である．つぎに，$h\geqq 0$ に対して

$$|\mu_r(f)-\mu_r(r_h f)|=\left|r\int_0^\infty e^{-rt}f(t)dt-r\int_0^\infty e^{-rt}f(t+h)dt\right|$$

† Bochner 積分の知識がいる（〔Hille and Phillips〕，〔宮寺〕を参照せよ）．

$$\begin{aligned}
&=\left|r\int_0^\infty e^{-rt}f(t)\,dt-re^{rh}\int_h^\infty e^{-rt}f(t)\,dt\right|\\
&=\left|r(1-e^{rh})\int_0^\infty e^{-rt}f(t)\,dt\right|+\left|re^{rh}\int_0^h e^{-rt}f(t)\,dt\right|\\
&\leqq|1-e^{rh}|\,\|f\|+e^{rh}|1-e^{-rh}|\,\|f\|\\
&=2|1-e^{rh}|\,\|f\|\to 0 \qquad (r\downarrow 0)
\end{aligned}$$

より，$\{\mu_r:\ 0<r<\infty\}$ は漸近的に不変な mean のネットである．また，任意の $x\in C$ と $y\in H$ に対して

$$\begin{aligned}
(\mu_r)_t(S(t)x,y)&=r\int_0^\infty e^{-rt}(S(t)x,y)\,dt\\
&=\left(r\int_0^\infty e^{-rt}S(t)x\,dt,\,y\right)
\end{aligned}$$

であるので，$T_{\mu_r}x=r\int_0^\infty e^{-rt}S(t)x\,dt$ である．よって定理 2.5.4 を使えば

$$r\int_0^\infty e^{-rt}S(t)x\,dt$$

は $F(\mathcal{S})$ の元 x_0 に弱収束する． ▨

最後に，2つの可換な nonexpansive 写像に対するつぎのような非線形エルゴード定理を証明する．

定理 2.6.4 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T と S を C から C への nonexpansive 写像で $TS=ST$ を満たすものとする．また $F(S)\cap F(T)\neq\phi$ とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}S^iT^jx \qquad (n\to\infty)$$

は $F(S)\cap F(T)$ の元 x_0 に弱収束する．

証明 $S=\{0,1,2,\cdots\}\times\{0,1,2,\cdots\}$ とし，$\mathcal{S}=\{S^iT^j:\ (i,j)\in S\}$ とする．任意の $f\in B(S)$ と $n>0$ に対して

$$\mu_n(f)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}f(i,j)$$

とすると，$\{\mu_n:\ n=1,2,\cdots\}$ は漸近的に不変な mean の点列となる．μ_n が mean になることは前のようにして確かめられるので(問題 2.6.4)，$\{\mu_n\}$ が漸近的に不変であることを示す．

任意の $(l,m)\in S$ に対して，

$$\begin{aligned}
|\mu_n(f)-\mu_n(r_{(l,m)}f)|&=\left|\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}f(i,j)-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}f(i+l,j+m)\right|\\
&\leqq\frac{1}{n^2}\{l\cdot n+m(n-l)+l\cdot n+m(n-l)\}\,\|f\|
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n^2}\{2n(l+m)-2ml\}\|f\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

であるので，$\{\mu_n\}$ は漸近的に不変である．また任意の $x\in C$ と $y\in H$ に対し

$$(\mu_n)_{(i,j)}(S^iT^jx, y)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}(S^iT^jx, y)$$

$$=\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}S^iT^jx,\ y\right)$$

であるので，$T_{\mu_n}x=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}S^iT^jx$ である．定理 2.5.4 を使えば

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}S^iT^jx$$

は $F(S)\cap F(T)$ の元 x_0 に弱収束する． ▨

注　この節で取り扱われた非線形エルゴード定理は，非線形発展方程式の解の挙動や，非線形最小化問題の解の求め方などと大きな関わりをもっているが，それを議論するためにはまた多くの紙面を要するので，ここでは取り扱わない．

問　題 2.6

1.　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．また，$F(T)\neq\phi$ とし，$x\in C$ とする．このとき，Banach limit μ に対して，

$$M_\mu=\{u\in C:\ \mu_n\|T^nx-u\|^2=\min_{z\in C}\mu_n\|T^nx-z\|^2\}$$

とするならば，M_μ はただ 1 点からなる．さらに，この点は μ によらないことを証明せよ．

2.　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．また，$F(T)\neq\phi$ とし，$x\in C$ とする．このとき，

$$S_nx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx\rightharpoonup u \qquad (n\to\infty)$$

とするならば，$u=\lim_{n\to\infty}PT^nx$ である．

3.　1 において，$M_\mu=\{u\}$ とすると，

$$u=\lim_{n\to\infty}PT^nx=\text{w-}\lim_{n\to\infty}S_nx$$

である．

4.　定理 2.6.4 の証明の中で

$$\mu_n(f)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1}f(i,j)$$

とすると，μ_n $(n=1,2,\cdots)$ は mean となる．これを示せ．

2.7 Ergodic retraction

§2.2 で得られた Baillon の非線形エルゴード定理(定理2.2.3)は，§2.5 で，invariant mean をもつ半群の場合まで拡張され，その結果はこれまでの種々の非線形エルゴード定理を含むとともに，その証明法は非線形問題を解くための1つの手がかりを与えるものであった．この節では，§2.5 と違った形と方法で，もう1つの非可換半群(right reversible 半群)に対する非線形エルゴード定理を証明してみよう．

この節を通じて，S は right reversible な semitopological 半群とする．また，S の元 a, b に対して，

$$\{a\} \cup \overline{Sa} \supseteq \{b\} \cup \overline{Sb}$$

で，順序 $a \leqq b$ が S の中に定義されているものとする(§2.4 参照)．

C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現であるとする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，$w(x)$ でネット $\{T_t x\colon t\in S\}$ に対する部分ネットの弱極限の全体を表すことにしよう．

つぎの定理は，定理 2.1.5 と同様の方法で証明できる(問題 2.7.1)．

補助定理 2.7.1 Hを Hilbert 空間とし，$\{x_\alpha\}$ を x_0 に弱収束する H の有界なネットとする．このとき，$x\in H$ に対して，$x\neq x_0$ ならば

$$\varliminf_\alpha \|x_\alpha - x_0\| < \varliminf_\alpha \|x_\alpha - x\|.$$

補助定理 2.7.1 を使って，つぎの定理が証明できる．

定理 2.7.2 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする．また $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする．このとき，$x\in C$ に対し，$w(x)\subset F(\mathcal{S})$ ならば，ネット $\{T_a x\colon a\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．

証明 $y\in F(\mathcal{S})$ とするならば，$\{\|T_a x-y\|\colon a\in S\}$ は有界である．また，$b\geqq a$ $(b\neq a)$ ならば，$s_\alpha a\to b$ となるネット $\{s_\alpha a\}$ が存在し，各 α に対して

$$\|T_{s_\alpha a}x-y\| = \|T_{s_\alpha}T_a x - T_{s_\alpha}y\| \leqq \|T_a x-y\|$$

となるから $\|T_b x-y\|\leqq\|T_a x-y\|$ である．よって，すべての $y\in F(\mathcal{S})$ に対し，

$$\lim_a \|T_a x-y\|$$

が存在する．$\{T_a x\colon a\in S\}$ は有界なので，それは C のある元 z に弱収束するような部分ネット $\{T_{a_\alpha}x\}$ を含まなければならない．仮定によって $z\in F(\mathcal{S})$

である．$\{T_a x\colon a\in S\}$ が z に弱収束しないとしよう．すると，$\{T_a x\colon a\in S\}$ の部分ネット $\{T_{a_\beta}x\}$ で z と異なる $F(\mathcal{S})$ の元 u に弱収束するものが存在する．補助定理 2.7.1 によって，

$$\begin{aligned}\lim_\alpha\|T_{a_\alpha}x-z\|<\lim_\alpha\|T_{a_\alpha}x-u\|&=\lim_a\|T_a x-u\|\\ &=\lim_\beta\|T_{a_\beta}x-u\|<\lim_\beta\|T_{a_\beta}x-z\|\end{aligned}$$

である．ところが $\lim_\alpha\|T_{a_\alpha}x-z\|=\lim_\beta\|T_{a_\beta}x-z\|$ であるから，これは矛盾である．よって，$\{T_a x\colon a\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．▨

S の部分集合 G が S の**生成集合**であるとは，

$$g_1g_2\cdots g_n\qquad(\text{ただし，}g_1,g_2,\cdots,g_n\in G)$$

の形をした元の全体が S で稠密になるときをいう．

定理 2.7.3　C を Hilbert 空間の閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする．また $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とし，$x\in C$ とする．このとき，S の生成集合 G のすべての元 g に対して，

$$\|T_{ga}x-T_a x\|\to 0$$

ならば，ネット $\{T_a x\colon a\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．

証明　定理 2.7.2 によって，$w(x)\subset F(\mathcal{S})$ を示せば十分である．$\{T_{a_\alpha}x\}$ を $\{T_a x\colon a\in S\}$ の部分ネットで，C の元 y に弱収束するものとしよう．このとき $T_g y=y$ ($\forall g\in G$) を示せばよい．もし G のある元 g に対して，$T_g y\neq y$ であったとしよう．補助定理 2.7.1 によって

$$\varliminf_\alpha\|T_{a_\alpha}x-y\|<\varliminf_\alpha\|T_{a_\alpha}x-T_g y\|\qquad(*)$$

である．一方

$$\begin{aligned}\|T_{a_\alpha}x-T_g y\|&\leqq\|T_{a_\alpha}x-T_{ga_\alpha}x\|+\|T_{ga_\alpha}x-T_g y\|\\ &\leqq\|T_{a_\alpha}x-T_{ga_\alpha}x\|+\|T_{a_\alpha}x-y\|\end{aligned}$$

なので

$$\varliminf_\alpha\|T_{a_\alpha}x-T_g y\|\leqq\varliminf_\alpha\|T_{a_\alpha}x-y\|$$

となる．これは (*) と矛盾する．よって $T_g y=y$ である．$g\in G$ は任意であったので $y\in F(\mathcal{S})$ がいえる．▨

注　$S=\{1,2,\cdots\}$，$G=\{1\}$ とすると，この定理は定理 2.2.6 となる．

つぎの補助定理は補助定理 2.2.2 の拡張定理である．

補助定理 2.7.4　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現であるとする．また，$F(\mathcal{S})$ を空でないとし，P を H から $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，ネット $\{PT_t x\colon t\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ のある元 z にノル

ムの意味で収束する．

証明 任意の $a, b \in S$ に対して，P が $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影であるので

$$\|T_a x - PT_a x\| \leqq \|T_a x - PT_b x\|$$

である．また，$a \geqq b$ $(a \neq b)$ としよう．このとき，a に収束するようなネット $\{s_\alpha b\}$ が存在する．各 α に対して，

$$\|PT_b x - T_{s_\alpha b} x\| = \|T_{s_\alpha} PT_b x - T_{s_\alpha} T_b x\| \leqq \|PT_b x - T_b x\|$$

なので，$s_\alpha b \to a$ とすると $\|PT_b x - T_a x\| \leqq \|PT_b x - T_b x\|$ となる．よって，$a \geqq b$ ならば，

$$\|PT_a x - T_a x\| \leqq \|PT_b x - T_a x\| \leqq \|PT_b x - T_b x\|$$

となる．ゆえにネット $\{\|PT_a x - T_a x\|: a \in S\}$ は収束する．さらに C の元 v と $F(\mathcal{S})$ の元 u に対して，P の性質から

$$\|Pv - u\|^2 \leqq \|v - u\|^2 - \|Pv - v\|^2$$

となる(p. 47 を参照)．$v = T_a x$ とし，$u = PT_b x$ (ただし，$a \geqq b$) とすると，

$$\begin{aligned}\|PT_a x - PT_b x\|^2 &\leqq \|T_a x - PT_b x\|^2 - \|PT_a x - T_a x\|^2 \\ &\leqq \|T_b x - PT_b x\|^2 - \|PT_a x - T_a x\|^2\end{aligned}$$

なので，簡単な計算によって $\{PT_a x: a \in S\}$ は Cauchy ネットであることがわかる(問題 2.7.2)．よって，$\{PT_a x: a \in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元にノルムの意味で収束する． ▨

この補助定理を使って，right reversible 半群のもとでの非線形エルゴード定理を "ergodic retraction" の存在という形で証明してみる(p. 61 を参照)．

定理 2.7.5 C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t: t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現であるとする．また $F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．このとき，つぎの命題は同値である．

(1) すべての $x \in C$ に対して，$\bigcap_{s \in S} \overline{\mathrm{co}}\{T_t x: t \geqq s\} \cap F(\mathcal{S}) \neq \phi$ である；

(2) C から $F(\mathcal{S})$ の上への nonexpansive retraction Q で，

$$QT_t = T_t Q = Q \qquad ({}^\forall t \in S),$$

$$Qx \in \overline{\mathrm{co}}\{T_t x: t \in S\} \qquad ({}^\forall x \in C)$$

を満たすものが存在する．

証明 (2)$\Longrightarrow$(1)：$x \in C$ とする．このとき $Qx \in F(\mathcal{S})$ である．また，

$$Qx \in \bigcap_{s \in S} \overline{\mathrm{co}}\{T_t x: t \geqq s\}$$

である．実際，すべての $s \in S$ に対して，

$$Qx = QT_s x \in \overline{\mathrm{co}}\{T_t T_s x: t \in S\} \subset \overline{\mathrm{co}}\{T_t x: t \geqq s\}$$

が成り立つ．

(1)$\Longrightarrow$(2)：$x\in C$ とし，$f\in F(\mathcal{S})$ とする．いま $b\geqq a$ $(b\neq a)$ とすると，$s_\alpha a\to b$ となるネット $\{s_\alpha a\}$ が存在する．このとき，任意の α に対して，

$$\|T_{s_\alpha a}x-f\|^2=\|T_{s_\alpha}T_a x-T_{s_\alpha}f\|^2\leqq\|T_a x-f\|^2$$

となるから，$\|T_b x-f\|^2\leqq\|T_a x-f\|^2$ である．よって，$f\in F(\mathcal{S})$ に対して

$$g(f)=\lim_s\|T_s x-f\|^2$$

が存在する．

$$r=\inf\{g(f):\ f\in F(\mathcal{S})\}$$

とする．このとき，g は $F(\mathcal{S})$ 上で連続な凸関数であり，$\|f\|\to\infty$ のとき，$g(f)\to\infty$ であるから，定理 1.3.10 によって，$g(f_0)=r$ となる $f_0\in F(\mathcal{S})$ が存在する．よって

$$M(x)=\{f\in F(\mathcal{S}):\ g(f)=r\}$$

は空でない閉凸集合となる．$M(x)$ が 1 点からなることを示す．実際，f_0，f_1 を $M(x)$ の元とすると，平行四辺形公式を用いることにより，すべての $s\in S$ に対して，

$$\left\|\frac{f_0-f_1}{2}\right\|^2=\frac{\|T_s x-f_0\|^2}{2}+\frac{\|T_s x-f_1\|^2}{2}-\left\|T_s x-\frac{f_0+f_1}{2}\right\|^2.$$

そこで，

$$\left\|\frac{f_0-f_1}{2}\right\|^2=r-\lim_s\left\|T_s x-\frac{f_0+f_1}{2}\right\|^2\leqq 0$$

となる．よって $f_0=f_1$ である．

$M(x)=\{u\}$ とし，P を H から $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影としよう．補助定理 2.7.4 より，$PT_s x$ はある $z\in F(\mathcal{S})$ に強収束する．$u=z$ であることを示そう．$a\leqq b$ $(b\neq a)$ とすると，$s_\alpha a\to b$ となるネット $\{s_\alpha a\}$ が存在する．各 α に対して，

$$\|PT_a x-T_{s_\alpha a}x\|^2=\|T_{s_\alpha}PT_a x-T_{s_\alpha}T_a x\|^2\leqq\|PT_a x-T_a x\|^2$$

となるので，$\|PT_a x-T_b x\|^2\leqq\|PT_a x-T_a x\|^2$ となる．よって $a\leqq b$ ならば

$$\|PT_a x-T_b x\|^2\leqq\|PT_a x-T_a x\|^2\leqq\|f-T_a x\|^2\qquad({}^\forall f\in F(\mathcal{S})).$$

ゆえに，$a\in S$ に対して

$$g(PT_a x)=\lim_b\|T_b x-PT_a x\|^2\leqq\|T_a x-f\|^2\qquad({}^\forall f\in F(\mathcal{S})).$$

g は連続であり，$\{PT_a x\}$ は $z\in F(\mathcal{S})$ に強収束するので，すべての $f\in F(\mathcal{S})$ に対して

$$g(z)\leqq\lim_a\|T_a x-f\|^2=g(f).$$

よって，$u=z=\lim_t PT_t x$ である．

(1)の仮定から，$K=\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_t x:\ t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})\neq\phi$ であるから，$v\in K$ とし

よう．このとき，すべての $s\in S$ に対して

$$\|u-v\|^2=\|T_sx-v\|^2-\|T_sx-u\|^2-2(u-v,\ T_sx-u).$$

よって

$$\begin{aligned}&\|u-v\|^2+2\lim_s(u-v,\ T_sx-u)\\&=\lim_s\|T_sx-v\|^2-\lim_s\|T_sx-u\|^2\geqq 0.\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$ としよう．このとき，

$$2\lim_s(u-v,\ T_sx-u)>-\|u-v\|^2-\varepsilon$$

である．ゆえに，この $\varepsilon>0$ に対して，$s_0\in S$ が存在して，$s\geqq s_0$ ならば

$$2(u-v,\ T_sx-u)>-\|u-v\|^2-\varepsilon$$

となるようにできる．$v\in\overline{\mathrm{co}}\{T_tx:\ t\geqq s_0\}$ であるので

$$2(u-v,v-u)\geqq-\|u-v\|^2-\varepsilon.$$

よって $\|u-v\|^2\leqq\varepsilon$ である．ε は任意であったので，$u=v$ となる．よって

$$\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_tx:\ t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})=\{u\}$$

となる．

$$Qx=\lim_t PT_tx\qquad(^\forall x\in C)$$

とおくと，$T_sQx=Qx$ となることは明らかであり，

$$QT_sx=\lim_t PT_tT_sx=\lim_t PT_{ts}x=Qx\qquad(^\forall s\in S,\ ^\forall x\in C)$$

であるから，$QT_s=Q$ もよい．

$$\{Qx\}=\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_tx:\ t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$$

から，$Qx\in\overline{\mathrm{co}}\{T_sx:\ s\in S\}$ $(^\forall x\in C)$ は明らかであり，

$$\|Qx-Qy\|=\lim_t\|PT_tx-PT_ty\|\leqq\|x-y\|\qquad(^\forall x,y\in C)$$

より Q は nonexpansive である．　▨

この定理の証明からもわかるように，つぎの命題が成り立つ．

定理 2.7.6　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{T_t:\ t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現であるとする．このとき，すべての $x\in C$ に対して，集合

$$\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_tx:\ t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$$

は高々 1 点からなる．

注　定理 2.7.5 の（2）のような retraction Q が一意であることは定理 2.7.6 と定理 2.7.5 の証明の前半から明らかである．

注　定理 2.7.5 は高橋によって証明された．この定理が Banach 空間で成り立つかどうかはわかっていない．

注　§2.4 と §2.7 の議論から，もうお気づきの読者もおられると思うが，不動点の存

在を議論するときは left reversible とか left invariant mean といった left に関する条件が必要であり，その収束性を議論するときは，right に関する条件が本質的に関わりをもつのである．これは可換の場合で議論しているとなかなか気づかないことである．

問　題 2.7

1.　補助定理 2.7.1 を証明せよ．

2.　補助定理 2.7.4 の証明の中で，$\{PT_a x\colon a\in S\}$ が Cauchy ネットであることを証明せよ．

3.　定理 2.7.2 を定理 2.7.6 を用いて証明せよ．

4.　C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，$\mathcal{S}=\{S(t)\colon 0\leqq t<\infty\}$ を C 上の nonexpansive 半群とする．また $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とし，$x\in C$ とする．このとき

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt\to z \qquad (\lambda\to\infty)$$

とするならば，$z=\lim_{t\to\infty}PS(t)x$ である．ただし，P は H から $F(\mathcal{S})$ の上への距離射影である．

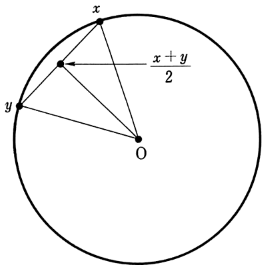
3

Banach 空間の幾何学

この章では Banach 空間の性質，特にその幾何学的性質について論じる．Banach 空間上で非線形問題を取り扱う際，その空間の凸性やノルムの微分可能性は非常に重要な性質であり，問題が解けるかどうかの大きな鍵となることが多い．

3.1 Banach 空間の凸性

この節では，非線形問題を取り扱う際よく現われる Banach 空間の凸性について論じてみよう．



Banach 空間 E が**狭義凸**(strictly convex) であるとは，E の任意の一次独立な元 x, y に対して，

$$\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$$

がつねに成り立つことである．

これは，$\|x\|=\|y\|=1$ $(x \neq y)$ ならば

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$$

となるということとも同値である(問題 3.1.2)．以後狭義凸のことを (sc) と略記することもある．

Banach 空間 E が**一様凸**(uniformly convex) であるとは，E の元からなる点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対して，

$$\|x_n\|=\|y_n\|=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$$

となることである．以後一様凸のことを（uc）と略記することもある．

定理 3.1.1 （(uc) と同値な条件） E を Banach 空間とする． このとき，つぎの（1），（2），（3）の条件は同値である．

（1） E は一様凸である;

（2） E の要素からなる点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$$

ならば $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$ である;

（3） 任意の $\varepsilon>0$（ただし，$\varepsilon\leqq 2$）に対して，

$$\|x\|=\|y\|=1, \qquad \|x-y\|\geqq\varepsilon$$

ならば $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|\leqq 1-\delta$ となる ε にのみ関係する $\delta>0$ が定まる．

証明 （2）⟹（1）は明らかなので，（1）⟹（2）を示す．

$\{x_n\}$, $\{y_n\}\subset E$ が

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|=1$$

を満たしているとすると，すべての n に対して，$\|x_n\|>0$, $\|y_n\|>0$ と仮定してもよい．そこで，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| &= \left\|\frac{x_n+y_n}{\|x_n\|}-\left(\frac{1}{\|x_n\|}-\frac{1}{\|y_n\|}\right)y_n\right\| \\ &\geqq \frac{\|x_n+y_n\|}{\|x_n\|}-\left|\frac{1}{\|x_n\|}-\frac{1}{\|y_n\|}\right|\|y_n\| \\ &= \frac{2}{\|x_n\|}\left(\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|-\frac{|\|y_n\|-\|x_n\||}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．よって

$$\varliminf_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}+\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|\geqq 2(1-0)=2.$$

また，$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\dfrac{x_n}{\|x_n\|}+\dfrac{y_n}{\|y_n\|}\right\|\leqq 2$ であるので，$\lim_{n\to\infty}\left\|\dfrac{x_n}{\|x_n\|}+\dfrac{y_n}{\|y_n\|}\right\|=2$ である．よって，（1）より

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|=0.$$

ところで

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|\geqq\frac{1}{\|x_n\|}(\|x_n-y_n\|-|\|y_n\|-\|x_n\||)$$

なので，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-y_n\|\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|=0$$

となる．一方 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|\geqq 0$ なので $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$ である．これで，(1)⟺(2) が証明された．

(1)⟹(3) を証明しよう．いま $0<\varepsilon\leqq 2$ となるある ε に対して，どんな $\delta>0$ をとっても

$$\|x-y\|\geqq\varepsilon,\quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\geqq 1-\delta,\quad \|x\|=\|y\|=1$$

となる x と y が存在すると仮定しよう．$\delta=\dfrac{1}{n}$ とおき，そのとき得られる x，y を x_n, y_n とすれば，各 n に対して，

$$\|x_n-y_n\|\geqq\varepsilon,\qquad 2-\frac{2}{n}\leqq\|x_n+y_n\|\leqq\|x_n\|+\|y_n\|=2$$

が成立しているので，$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$ となる．仮定より E は一様凸なので，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$$

となる．これは $\|x_n-y_n\|\geqq\varepsilon$ に矛盾する．

最後に (3)⟹(1) を証明する．

$$\|x_n\|=\|y_n\|=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$$

とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある自然数 n_0 が存在して，

$$n\geqq n_0 \text{ ならば } \|x_n-y_n\|<\varepsilon$$

となることを証明すればよい．そうでないとすると，ある $\varepsilon>0$ と $\|x_{n_m}-y_{n_m}\|\geqq\varepsilon$ となる点列 $\{x_{n_m}\}$ と $\{y_{n_m}\}$ が存在することになる．このとき，仮定よりある $\delta>0$ が存在して，

$$\left\|\frac{x_{n_m}+y_{n_m}}{2}\right\|\leqq 1-\delta \tag{*}$$

となる．一方，$\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$ であるから，ある n_0 が存在して，$n\geqq n_0$ ならば $2-\|x_n+y_n\|<2\delta$ となるようにできる．これは

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|>1-\delta$$

を意味し，いま n_m を $n_m\geqq n_0$ となるようにとると，(*) に矛盾する．よって，(3)⟹(1) が証明された．▨

定理 3.1.1 より，つぎの定理は明らかである．

定理 3.1.2 ((uc) ならば (sc))　Banach 空間が一様凸ならば狭義凸である．

E を Banach 空間とする．このとき，

$$\delta(\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{\|x+y\|}{2}:\ \|x\|\leqq 1,\ \|y\|\leqq 1,\ \|x-y\|\geqq\varepsilon\right\}$$

で定義される $[0,2]$ から $[0,1]$ への関数 δ は空間 E の**凸性の modulus** とよばれる．

明らかに δ は増加関数である．すなわち，

$$\varepsilon_1\leqq\varepsilon_2 \text{ ならば } \delta(\varepsilon_1)\leqq\delta(\varepsilon_2)$$

である．また，つぎの定理が成立する．

定理 3.1.3 ((uc) であるための同値条件) Banach 空間 E が一様凸であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)>0$ が成り立つことである．

証明 $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)>0$ ということは，

$$\|x\|=\|y\|=1, \qquad \|x-y\|\geqq\varepsilon>0$$

ならば $\delta(\varepsilon)\leqq 1-\dfrac{\|x+y\|}{2}$，すなわち，$\dfrac{\|x+y\|}{2}\leqq 1-\delta(\varepsilon)$ ということであるから，これは E が一様凸であることを意味する．

逆に，E が一様凸であるとする．このとき，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$\delta(\varepsilon)=0$ とすると

$$\|x_n+y_n\|\to 2,\quad \|x_n\|\leqq 1,\quad \|y_n\|\leqq 1,\quad \|x_n-y_n\|\geqq\varepsilon>0$$

となる点列 $\{x_n\},\{y_n\}$ が存在することになる．

$$\|x_n+y_n\|\leqq\|x_n\|+\|y_n\|\leqq 2$$

であり，$\|x_n+y_n\|\to 2$ であるので，$\varlimsup_{n\to\infty}\|x_n\|=1$，$\varlimsup_{n\to\infty}\|y_n\|=1$ となる．また，$\|x_n+y_n\|-\|x_n\|\leqq\|y_n\|\leqq 1$ より，$\|x_n+y_n\|-1\leqq\|x_n\|$ となる．よって，$1\leqq\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$ である．だから $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ となる．同様に $\lim_{n\to\infty}\|y_n\|=1$ である．E が一様凸であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$$

となるが，これは $\|x_n-y_n\|\geqq\varepsilon>0$ に矛盾する． ▨

また，つぎの定理はよく用いられる定理である．

定理 3.1.4 E を一様凸な Banach 空間とする．このとき，$\varepsilon>0$ に対し，

$$\|x\|\leqq r,\quad \|y\|\leqq r,\quad \|x-y\|\geqq\varepsilon>0$$

ならば

$$\frac{\|x+y\|}{2}\leqq r\left\{1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right\}$$

である．ただし，δ は E の凸性の modulus である．

証明　E を一様凸な Banach 空間とする．このとき，$\varepsilon>0$ に対し，$\|x\|\leqq r$, $\|y\|\leqq r$, $\|x-y\|\geqq\varepsilon>0$ ということは,

$$\left\|\frac{x}{r}\right\|\leqq 1,\quad \left\|\frac{y}{r}\right\|\leqq 1,\quad \left\|\frac{x}{r}-\frac{y}{r}\right\|\geqq\frac{\varepsilon}{r}$$

を意味するから，$\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\leqq 1-\left\|\frac{x+y}{2r}\right\|$ となる．よって

$$\frac{\|x+y\|}{2}\leqq r\left\{1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right\}.$$

▨

つぎの定理もよく用いられる．

定理 3.1.5　E を一様凸な Banach 空間とする．点列 $\{x_n\}\subset E$ が

$$x_n\rightharpoonup x,\qquad \|x_n\|\to\|x\|$$

を満たすならば $x_n\to x$ である．

証明　$x=0$ のときは $\|x_n\|\to 0$ だから $x_n\to 0$ である．よって $x\neq 0$ とする．$y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|}$, $y_0=\frac{x}{\|x\|}$ とし，$x_n\not\to x$ とすると，$y_n\not\to y_0$ である．このとき，ある $\varepsilon>0$ と $\{y_n\}$ の部分列 $\{y_{n_k}\}$ が存在して,

$$\|y_{n_k}-y_0\|\geqq\varepsilon$$

となるようにできる．E は一様凸なので，ある $\delta>0$ が存在して

$$\left\|\frac{y_{n_k}+y_0}{2}\right\|\leqq 1-\delta$$

である．$y_{n_k}\rightharpoonup y_0$ なので，ノルムの弱下半連続性により

$$\|y_0\|\leqq\varliminf_{k\to\infty}\left\|\frac{y_{n_k}+y_0}{2}\right\|\leqq 1-\delta$$

が得られるが，これは $\|y_0\|=1$ に矛盾する．よって $x_n\to x$ である．▨

最後に James の定理を用いてつぎの定理を証明することができる．

定理 3.1.6（(uc) ならば回帰的）　Banach 空間 E が一様凸であればそれは回帰的でもある．

証明　$f\in S(E^*)$, $\{x_n\}\subset S(E)$, $f(x_n)\to 1$ とすると，$\{x_n\}$ は Cauchy 列である．もし $\{x_n\}$ が Cauchy 列でないとすると，ある $\varepsilon>0$ に対して,

$$\|x_{n_i}-x_{m_i}\|\geqq\varepsilon$$

となる $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ と $\{x_{m_i}\}$ が存在する．E が一様凸であるので，ある $\delta>0$ が存在して,

$$\left|f\left(\frac{x_{n_i}+x_{m_i}}{2}\right)\right|\leqq\|f\|\left\|\frac{x_{n_i}+x_{m_i}}{2}\right\|\leqq 1-\delta$$

となる．これは $f(x_n)\to 1$ に矛盾する．ゆえに，$\{x_n\}$ は Cauchy 列であり,

E の中に $x_n \to x$ となるような x が存在する．また，

$$\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$$

であるので，$x \in S(E)$ となる．よって，James の定理（定理 1.2.10）より E は回帰的となる． ▨

問　題 3.1

1. Hilbert 空間は一様凸である．これを示せ．

2. Banach 空間が狭義凸であることとつぎの条件とは同値である：

$$\|x\| = \|y\| = 1 \ (x \neq y) \text{ ならば } \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 \text{ である.}$$

3. E を一様凸な Banach 空間とし，δ を E の凸性の modulus とする．また，$\varepsilon > 0$ に対して，$\|x\| \leqq r$, $\|y\| \leqq r$, $r \leqq R$, $\|x - y\| \geqq \varepsilon > 0$ とする．このとき，すべての λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ に対して，

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leqq r\left\{1 - 2\lambda(1-\lambda)\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right\}$$

が成り立つ．これを示せ．

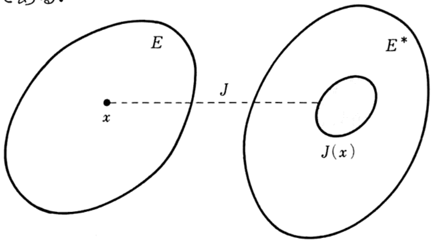
4. E を一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．このとき，$x \in E$ に対して，$\|x - x_0\| = d(x, C)$ となるような $x_0 \in C$ が一意に存在する．これを示せ．

3.2 双対写像とノルムの微分可能性

E を Banach 空間とする．このとき，$x \in E$ に対して，E^* の部分集合

$$J(x) = \{f \in E^* \colon (x, f) = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

を対応させる写像 J のことを E の**双対写像**(duality mapping)とよぶ．ただし，$(x, f) = f(x)$ である．



この双対写像に対してつぎの定理が証明できる．

定理 3.2.1 (双対写像の基本的性質)　E を Banach 空間とし，J を E から E^* への双対写像とする．このときつぎの（i）から（v）までの性質が成り立つ．

（i）　$x \in E$ に対して，$J(x)$ は空でない有界な閉凸集合である；

（ii）　$J(0) = \{0\}$；

（iii）　$x \in E$ とスカラー α に対して，$J(\alpha x) = \alpha J(x)$ である；

（iv）　$x, y \in E$ と $f \in J(x)$，$g \in J(y)$ に対して，$(x-y, f-g) \geqq 0$ である；

（v）　$x, y \in E$ と $f \in J(y)$ に対して，

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 \geqq 2(x-y, f)$$

である．

証明　（i），（ii）　$x=0$ のときは，$f=0$ が $J(0)$ のただ1つの要素であることは明らか．$x \neq 0$ のときは Hahn–Banach の定理より，$(x, g) = \|x\|$ で，$\|g\| = 1$ となる要素 $g \in E^*$ が存在するから，$f = \|x\| g$ とすると

$$(x, f) = \|x\|(x, g) = \|x\|^2$$

であり，かつ $\|f\|^2 = \|\|x\|g\|^2 = \|x\|^2\|g\|^2 = \|x\|^2$ である．よって $J(x) \neq \phi$ である．また，$J(x)$ が有界閉凸集合となることも明らかである(問題 3.2.1)．

（iii）　$\alpha = 0$ のときは明らか．$\alpha \neq 0$ とする．$f \in J(\alpha x)$ とすると，J の定義から $(\alpha x, f) = \|\alpha x\|^2 = \|f\|^2$ である．だから，

$$\left(x, \frac{f}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha^2}(\alpha x, f)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha^2\|x\|^2=\|x\|^2=\left\|\frac{f}{\alpha}\right\|^2$$

である．よって $\dfrac{f}{\alpha}\in J(x)$ である．これから $f\in\alpha J(x)$．逆の包含関係もいえるので，$J(\alpha x)=\alpha J(x)$ である．

(iv) $f\in J(x)$，$g\in J(y)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(x-y, f-g)&=(x,f)-(x,g)-(y,f)+(y,g)\\&\geqq\|x\|^2-\|x\|\|g\|-\|y\|\|f\|+\|y\|^2\\&=\|x\|^2-2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|-\|y\|)^2\geqq 0.\end{aligned}$$

(v) $f\in J(y)$ とすると

$$\begin{aligned}\|x\|^2-\|y\|^2-2(x-y,f)&=\|x\|^2+\|y\|^2-2(x,f)\\&\geqq\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|\\&=(\|x\|-\|y\|)^2\geqq 0\end{aligned}$$

となる．よって $\|x\|^2-\|y\|^2\geqq 2(x-y,f)$ である． ▨

Banach 空間に条件をつけると双対写像はつぎのようなものになる．

定理 3.2.2 E を Banach 空間とするとき，つぎの (i), (ii), (iii) が成り立つ．

(i) E が狭義凸ならば，双対写像 J は1対1である．すなわち，

$$x\neq y\Longrightarrow J(x)\cap J(y)=\phi.$$

(ii) E が回帰的ならば，J は E から E^* の上への写像である．

(iii) E^* が狭義凸ならば，J は一価写像である．

証明 (i) E を狭義凸とし，$x, y\in E$ とする．もし $f\in J(x)\cap J(y)$ ならば，

$$\|x\|=\|y\|,\qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|\|x\|\geqq\left(\frac{x+y}{2}, f\right)=\|x\|^2$$

となる．よって，$\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|=\|x\|=\|y\|$ である．E は狭義凸なので，$x=y$ である．だから，

$$x\neq y\Longrightarrow J(x)\cap J(y)=\phi.$$

(ii) 任意の $f\in E^*$ に対して，Hahn–Banach の定理より

$$(f,u)=\|f\|,\qquad \|u\|=1$$

となる $u\in E^{**}$ が存在する．いま $x=\|f\|u$ とおくと

$$(f,x)=(f,\|f\|u)=\|f\|^2=\|x\|^2$$

となる．$E=E^{**}$ であるので，$J(x)\ni f$ となり，J は E から E^* の上への写像であることがわかる．

(iii)　$J(0)=\{0\}$ はよい．$x\neq 0$ とし，$f,g\in J(x)$ とする．このとき，

$$(x,f)=\|f\|^2=\|x\|^2=\|g\|^2=(x,g)$$

であるから $2\|x\|^2=(x,f+g)\leqq\|x\|\|f+g\|$ となる．よって

$$\|f\|+\|g\|=2\|x\|\leqq\|f+g\|$$

を得る．したがって $\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$ となる．E^* は狭義凸であるから $g=\alpha f$ とかけるが $(x,f)=(x,g)=(x,\alpha f)=\alpha(x,f)$ より $\alpha=1$ となる．よって，$f=g$ である．▨

注　この定理の（i）と（ii）において，それらの命題の逆も真である．すなわち，つぎの命題が成り立つ(問題 3.2.2，3.2.3)．

（i）　Banach 空間 E の双対写像 J が 1 対 1 ならば，E は狭義凸である．

（ii）　Banach 空間 E の双対写像 J が E^* の上への写像になるならば，E は回帰的になる．

定理 3.2.3　E^* が一様凸であるならば，J は一価写像で，しかも E の有界集合上で一様連続である．すなわち，B を E の有界集合とするとき，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し，ある正数 $\delta>0$ が存在し，

$$x,y\in B,\quad \|x-y\|<\delta\Longrightarrow\|J(x)-J(y)\|<\varepsilon$$

が成り立つ．

証明　E^* が一様凸であるから，E^* は狭義凸である．それゆえ，J は一価写像である．J が一様連続にならないような有界集合 B が存在するとしよう．このとき，ある $\varepsilon>0$ と B の点列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ が存在して，$\|x_n-y_n\|<\dfrac{1}{n}$ であり，しかも $\|J(x_n)-J(y_n)\|\geqq\varepsilon$ である．$x_n\to 0$ ならば $y_n\to 0$ となり，しかも $\|x_n\|=\|J(x_n)\|$，$\|y_n\|=\|J(y_n)\|$ であるから，$J(x_n)\to 0$，$J(y_n)\to 0$ となる．これは $\|J(x_n)-J(y_n)\|\geqq\varepsilon$ に反するから，$x_n\not\to 0$ である．よって $\|x_{n_i}\|\geqq\alpha$ となるような $\alpha>0$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が選べるが $\|x_n\|-\|y_n\|\leqq\|x_n-y_n\|<\dfrac{1}{n}$ でもあるから，i が十分大きいときは，$\|y_{n_i}\|\geqq\dfrac{\alpha}{2}$ ともなる．したがって，一般性を失うことなく，$\|x_n\|\geqq\beta$，$\|y_n\|\geqq\beta$ となるような $\beta>0$ が存在するとしてもよい．

$$u_n=\frac{x_n}{\|x_n\|},\qquad v_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}$$

とおくと，$\|u_n\|=\|v_n\|=1$ でしかも

$$\begin{aligned}\|u_n-v_n\|&=\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}-\frac{y_n}{\|y_n\|}\right\|=\left\|\frac{\|y_n\|x_n-\|x_n\|y_n}{\|x_n\|\|y_n\|}\right\|\\&\leqq\frac{1}{\beta^2}\|(\|y_n\|-\|x_n\|)x_n+\|x_n\|(x_n-y_n)\|\\&\leqq\frac{1}{\beta^2}\Bigl(\bigl|\|y_n\|-\|x_n\|\bigr|\|x_n\|+\|x_n\|\|x_n-y_n\|\Bigr)\to 0\end{aligned}$$

となる．さらに，

$$(u_n, J(u_n)+J(v_n)) = \|u_n\|^2 + (u_n - v_n, J(v_n)) + \|v_n\|^2$$
$$\geqq 2 - \|u_n - v_n\|\|J(v_n)\| = 2 - \|u_n - v_n\|$$

なので，

$$\left\|\frac{J(u_n)+J(v_n)}{2}\right\| \geqq \frac{1}{2}(u_n, J(u_n)+J(v_n)) \geqq 1 - \frac{\|u_n - v_n\|}{2}$$

となり $\varliminf_{n\to\infty}\left\|\frac{J(u_n)+J(v_n)}{2}\right\| \geqq 1$ を得る．また

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\frac{J(u_n)+J(v_n)}{2}\right\| \leqq \varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1$$

であるから $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{J(u_n)+J(v_n)}{2}\right\| = 1$ となる．$\|J(u_n)\| = \|J(v_n)\| = 1$ であり，E^* は一様凸であるから，$\|J(u_n) - J(v_n)\| \to 0$ を得る．一方，

$$J(x_n) - J(y_n) = \|x_n\|(J(u_n) - J(v_n)) + (\|x_n\| - \|y_n\|)J(v_n)$$

であるから，$\|J(x_n) - J(y_n)\| \to 0$ となる． これは $\|J(x_n) - J(y_n)\| \geqq \varepsilon > 0$ に矛盾する．よって定理は証明された． ▨

つぎに Banach 空間のノルムの微分可能性について論じる．

E を Banach 空間とし，$S(E) = \{x \in E \colon \|x\| = 1\}$ とする．このとき，$x, y \in S(E)$ に対して，つぎの極限を考える：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}. \qquad (*)$$

Banach 空間 E のノルムが **Gâteaux 微分可能**であるとは，$S(E)$ の任意の元 x, y に対して，つねに $(*)$ が存在するときをいう．このとき，空間 E は**滑らか**(smooth)であるともいう．Banach 空間 E のノルムが**一様に Gâteaux 微分可能**であるとは，任意の $y \in S(E)$ に対して，$(*)$ が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するときをいう．Banach 空間 E のノルムが **Fréchet 微分可能**であるとは，任意の $x \in S(E)$ について，$(*)$ が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するときをいう．Banach 空間 E のノルムが**一様に Fréchet 微分可能**であるとは，$(*)$ が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するときをいう．このとき，空間 E は**一様に滑らか**(uniformly smooth)であるともいう．以後，Gâteaux 微分可能のことを (G)，一様に Gâteaux 微分可能のことを (uG), Fréchet 微分可能のことを (F)，一様に Fréchet 微分可能のことを (uF) と略記することもある．また空間が滑らかなことを (s)，一様に滑らかなことを (us) と書くこともある．

定理 3.2.4 ((s) ならば J は一価) Banach 空間 E が滑らかならば双対写

像 J は一価写像である.

証明　$J(0)=\{0\}$ であるので, $x\neq 0$ のときを考えればよい. まず $\|x\|=1$ とし, $f\in J(x)$, $y\in S(E)$ とする. いま $\lambda>0$ に対して,

$$\frac{f(y)}{\|x\|}=\frac{f(x+\lambda y)-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}\leqq\frac{\|x\|\|x+\lambda y\|-\|x\|^2}{\lambda\|x\|}=\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

同様に $\lambda<0$ とすると

$$\frac{f(y)}{\|x\|}\geqq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}.$$

E は滑らかであるので

$$\tau(x,y)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}$$

がつねに存在し, $f(y)=\|x\|\tau(x,y)$ となる. よって, f は一意に決まってしまう. 一般に $x\neq 0$ のとき $J(x)$ が一価であることは,

$$J(x)=\|x\|J\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

より明らかである. ▨

実は, 定理 3.2.4 の逆も真である. それを証明する前につぎの補助定理を証明しておく.

補助定理 3.2.5　Banach 空間 E 上の双対写像 J が一価ならば, J は E から E^* への写像として連続である. ただし, E の位相はノルム位相であり, E^* の位相は弱*位相である.

証明　$x_n\to x$ とする. J は一価であるので, $J(x_n)=f_n$ とすると, $\{f_n\}$ が $J(x)$ に弱*位相の意味で収束することをいえばよい. $\{x_n\}$ が有界であるので, $\{f_n\}$ も有界となる. だから, $\{f_n\}$ の弱*位相の意味で収束する部分ネット $\{f_{n_\alpha}\}$ の極限を f' とするとき, $f'=J(x)$ をいえばよい. E^* のノルムは弱*位相の意味で下半連続であるので,

$$\|f'\|\leqq\varliminf_{\alpha}\|f_{n_\alpha}\|=\varliminf_{\alpha}\|x_{n_\alpha}\|=\|x\|.$$

一方,

$$\begin{aligned}|(x,f')-\|x_{n_\alpha}\|^2|&=|(x,f')-(x_{n_\alpha},f_{n_\alpha})|\\&\leqq|(x,f'-f_{n_\alpha})|+|(x-x_{n_\alpha},f_{n_\alpha})|\end{aligned}$$

であり, $(x,f'-f_{n_\alpha})\to 0$, $(x-x_{n_\alpha},f_{n_\alpha})\to 0$ であるので,

$$|(x,f')-\|x_{n_\alpha}\|^2|\to 0.$$

よって, $(x,f')=\|x\|^2$ となる. だから,

$$\|x\|^2=(x,f')\leqq\|x\|\|f'\|$$

がいえて，$\|x\|\leqq\|f'\|$ となる．ゆえに，$(x,f')=\|x\|^2=\|f'\|^2$ である．よって $J(x)=f'$ である．▨

定理 3.2.6 (J が一価ならば (s)) Banach 空間 E の双対写像 J が一価ならば E は滑らかとなる．

証明 J を一価とすると，補助定理 3.2.5 より，J は E から E^* への写像として連続である．また，$x,y\in S(E)$ に対して，定理 3.2.4 の証明のようにして，$\lambda>0$ のときは

$$\begin{aligned}\frac{(y,J(x))}{\|x\|}&\leqq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}=\frac{\|x+\lambda y\|^2-\|x\|\|x+\lambda y\|}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\&\leqq\frac{\|x+\lambda y\|^2-(x,J(x+\lambda y))}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\&=\frac{(x+\lambda y,J(x+\lambda y))-(x,J(x+\lambda y))}{\lambda\|x+\lambda y\|}\\&=\frac{(\lambda y,J(x+\lambda y))}{\lambda\|x+\lambda y\|}=\frac{(y,J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}.\end{aligned}$$

$\lambda<0$ のときは

$$\frac{(y,J(x))}{\|x\|}\geqq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\geqq\frac{(y,J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}.$$

よって，

$$\lim_{\lambda\to0}\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}=\frac{(y,J(x))}{\|x\|}$$

となる．これは E が滑らかであることを意味する．▨

問 題 3.2

1. J を Banach 空間 E の双対写像とする．このとき，$x\in E$ に対して，$J(x)$ は E^* の有界閉凸集合となる．これを示せ．

2. Banach 空間 E の双対写像 J が 1 対 1 ならば，E は (sc) である．これを示せ．

3. Banach 空間 E の双対写像 J が E^* の上への写像になるならば，E は回帰的になる．これを示せ．

4. E を Banach 空間とする．このとき，E^* が (sc) ならば，E は (s) である．これを示せ．

5. E を Banach 空間とする．このとき，E^* が (s) ならば E は (sc) である．これを示せ．

6. E を回帰的な Banach 空間とする．このとき，つぎの (i)，(ii) が成

り立つ．これを示せ．

（i） E が (sc) であることと E^* が (s) であることとは同値である．

（ii） E が (s) であることと E^* が (sc) であることとは同値である．

3.3 双対写像とノルムの微分可能性 (2)

前節に引き続いて，この節でも Banach 空間の双対写像とノルムの微分可能性について勉強することにする．

補助定理 3.3.1 Banach 空間 E が狭義凸であるための必要十分条件は，

$$x, y \in S(E),\ x \neq y,\ x^* \in J(x) \Longrightarrow 1-(y, x^*)>0$$

が成り立つことである．

証明 まず必要性を示す．$x, y \in S(E)$，$x \neq y$，$x^* \in J(x)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(y, x^*) &= (x+y, x^*)-(x, x^*)\\ &\leqq \|x+y\|\|x^*\|-(x, x^*)\\ &= \|x^*\|(\|x+y\|-\|x\|)\\ &= \|x+y\|-1.\end{aligned}$$

よって，$1-(y, x^*) \geqq 2-\|x+y\|$ となる．ここで，E は (sc) であるので，$\|x+y\|<2$ である．よって，

$$1-(y, x^*) \geqq 2-\|x+y\|>2-2=0.$$

つぎに，十分性を示す．E が (sc) でないとする．このとき，$x, y \in S(E)$，$x \neq y$ であるが $\|x+y\|=2$ となる x, y が存在する．$z=\dfrac{1}{2}(x+y)$ とおくと，$x \neq y$ より，$z \neq x$ である．また $\|z\|=1$ でもある．いま，$z^* \in J(z)$ とすると，$\|z^*\|=\|z\|=\|x\|=\|y\|=1$ であり，しかも

$$(x+y, z^*)=(2z, z^*)=2\|z\|^2=2.$$

よって，

$$(x, z^*)=2-(y, z^*) \geqq 2-\|y\|\|z^*\|=2-1=1.$$

また，$(x, z^*) \leqq \|x\|\|z^*\|=1$ なので，$(x, z^*)=1$ である．これから，$1-(x, z^*)=0$ となり，証明は完了する．▨

この補助定理を使って，つぎの定理が証明できる．

定理 3.3.2 Banach 空間 E が狭義凸であるための必要十分条件は，

$$x^* \in J(x),\ y^* \in J(y),\ x \neq y \Longrightarrow (x-y, x^*-y^*)>0$$

が成り立つことである．

証明 必要性を証明する．$x^* \in J(x)$，$y^* \in J(y)$，$x \neq y$ とする．このとき，

$$(y, x^*)=(x+y, x^*)-(x, x^*) \leqq \|x^*\|(\|x+y\|-\|x\|).$$

よって，

$$\|x^*\|\|y\|-(y, x^*) \geqq \|x^*\|(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|).$$

同様にして,

$$\|y^*\|\|x\|-(x,y^*)\geqq\|y^*\|(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|).$$

上の 2 式から,

$$\begin{aligned}&(x-y,x^*-y^*)\\&\quad=(\|x^*\|-\|y^*\|)(\|x\|-\|y\|)+(\|x^*\|\|y\|-(y,x^*))+(\|y^*\|\|x\|-(x,y^*))\\&\quad\geqq(\|x\|-\|y\|)^2+(\|x\|+\|y\|)(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|).\end{aligned}$$

x と y が一次独立のときは, E が (sc) であるので, $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$ となる. よって $(x-y,x^*-y^*)>0$ である. x と y が一次従属のときは, $y=\alpha x$ となるが ($x=\beta y$ のときも同様なので $y=\alpha x$ とする), $x\neq y$ であるから $x\neq 0$ である. よって $(\|x\|-\|y\|)^2=\|x\|^2(1-|\alpha|)^2$ は $|\alpha|=1$ を除いて正となる. だから, $|\alpha|=1$ を除いて $(x-y,x^*-y^*)>0$ である. $x\neq y$ であるから $\alpha=1$ ということはない. $\alpha=-1$ のときは,

$$(\|x\|+\|y\|)(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|)=(\|x\|+\|y\|)^2>0$$

であるから, この場合も $(x-y,x^*-y^*)>0$ である. よって必要性は証明できた.

つぎに十分性を示す. E が (sc) でないとする. このとき, 補助定理より $1-(y,x^*)=0$ となるような $x,y\in S(E)$ $(x\neq y)$ と $x^*\in J(x)$ が存在する. この x,y に対して,

$$1=(y,x^*)\leqq\|x^*\|(\|x+y\|-\|x\|)=\|x+y\|-1$$

より, $\|x+y\|\geqq 2$ である. また $\|x+y\|\leqq\|x\|+\|y\|=2$ でもあるので, $\|x+y\|=2$ である. いま $z=\frac{1}{2}(x+y)$ とおくと, $x\neq y$ より $z\neq x$ である. また $\|z\|=1$ でもある. $z^*\in J(z)$ として, 補助定理 3.3.1 の証明のような計算をすると, $(x,z^*)=1$ を得る. よって,

$$(z-x,z^*-x^*)=1-(z,x^*)-(x,z^*)+1=0$$

である. 定理 3.2.1 の (iv) より $0\leqq(z-x,z^*-x^*)$ であるので, 十分性が証明されたことになる. ▨

つぎに Banach 空間が一様凸であることの特徴づけを行う.

補助定理 3.3.3　Banach 空間が一様凸であるための必要十分条件は,

$$\beta(t)=\inf\{1-(y,x^*):\ x,y\in S(E),\ \|x-y\|\geqq t,\ x^*\in J(x)\}$$

とするとき, すべての $t\in(0,2]$ に対して, $\beta(t)>0$ となることである.

証明　必要性を示す. $x,y\in S(E)$, $x^*\in J(x)$ とするとき, 補助定理 3.3.1 の証明と同様に,

$$1-(y,x^*)\geqq 2-\|x+y\|$$

が成り立つ．いま E は (uc) なので $\|x-y\| \geqq t$, $t \in (0,2]$ に対して，

$$2-\|x+y\| \geqq \delta(t) > 0$$

となる $\delta(t)$ が存在する．よって $\beta(t) \geqq \delta(t) > 0$ である．

つぎに十分性を示す．すべての $t \in (0,2]$ に対して，$\beta(t)>0$ なのに，E が (uc) でないとすると

$$0 < \|x_n + y_n\| \to 2, \quad \|x_n - y_n\| \geqq t_0$$

となるような点列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset S(E)$ と $t_0 \in (0,2]$ が存在する．いま，

$$a_n = \frac{1}{\|x_n+y_n\|}, \quad z_n = a_n(x_n+y_n), \quad z_n{}^* \in J(z_n), \quad x_n{}^* \in J(x_n), \quad y_n{}^* \in J(y_n)$$

とすると，$z_n \in S(E)$ であり，かつ

$$\begin{aligned} \|x_n - z_n\| &= \|a_n(x_n-y_n) - (2a_n-1)x_n\| \\ &\geqq a_n t_0 - |2a_n - 1|, \\ \|y_n - z_n\| &\geqq a_n t_0 - |2a_n-1| \end{aligned}$$

を得る．$a_n \to \dfrac{1}{2}$ より，$a_n t_0 - |2a_n - 1| \to \dfrac{t_0}{2}$ となる．よって，ある n_0 が存在して，$n \geqq n_0$ ならば

$$\|x_n - z_n\| \geqq \frac{t_0}{4}, \qquad \|y_n - z_n\| \geqq \frac{t_0}{4}$$

となる．だから，$n \geqq n_0$ ならば

$$\begin{aligned} 2-\|x_n+y_n\| &= 2-(x_n+y_n, z_n{}^*) \\ &= 1-(x_n, z_n{}^*) + 1 - (y_n, z_n{}^*) \\ &\geqq \beta\left(\frac{t_0}{4}\right) + \beta\left(\frac{t_0}{4}\right) = 2\beta\left(\frac{t_0}{4}\right) > 0 \end{aligned}$$

となる．いま $n \to \infty$ とすれば，$0 \geqq 2\beta\left(\dfrac{t_0}{4}\right) > 0$ となり矛盾である． ▨

定理 3.3.4 Banach 空間 E が一様凸であるための必要十分条件は，

$$\gamma(t) = \inf\{(x-y, x^*-y^*) : x, y \in S(E),\ \|x-y\| \geqq t,\ x^* \in J(x),\ y^* \in J(y)\}$$

とするとき，$t \in (0,2]$ に対して，$\gamma(t) > 0$ となることである．

証明 必要性を示す．$t \in (0,2]$ として，$x, y \in S(E)$, $\|x-y\| \geqq t$, $x^* \in J(x)$, $y^* \in J(y)$ をとると，

$$\begin{aligned} (x-y, x^*-y^*) &= 1-(x,y^*) + 1 - (y, x^*) \\ &\geqq 2\beta(t) > 0 \end{aligned}$$

となる．よって，$\gamma(t) > 0$ である．

つぎに十分性を示す．すべての $t \in (0,2]$ に対して，$\gamma(t) > 0$ なのに，E が (uc) でないとすると，$\beta(t) = 0$ となる $t \in (0,2]$ が存在する．すなわち，

$$\|x_n-y_n\|\geqq t,\quad x_n^*\in J(x_n),\quad 1-(y_n, x_n^*)\to 0$$

となるような $\{x_n\}, \{y_n\}\subset S(E)$ と $\{x_n^*\}$, $t\in(0,2]$ が存在する．ところで，

$$1-(y_n, x_n^*)\geqq 2-\|x_n+y_n\|\geqq 0$$

なので，$\|x_n+y_n\|\to 2$ である．だからすべての n について，$\|x_n+y_n\|>0$ と仮定してもよい．そこで，

$$a_n=\frac{1}{\|x_n+y_n\|},\quad z_n=a_n(x_n+y_n),\quad z_n^*\in J(z_n)$$

とおくと，$(x_n+y_n, z_n^*)=\|x_n+y_n\|\to 2$ となる．よって $(x_n, z_n^*)\to 1$ を得る．よって，

$$\begin{aligned}(z_n-x_n, z_n^*-x_n^*)&=1-a_n-a_n(y_n, x_n^*)+1-(x_n, z_n^*)\\&\longrightarrow 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1+1-1=0.\end{aligned}$$

一方，補助定理 3.3.3 の証明と同様にして，十分大きな n に対して

$$\|z_n-x_n\|\geqq\frac{t}{4}$$

である．よって，十分大きな n に対して，$(z_n-x_n, z_n^*-x_n^*)\geqq r\left(\frac{t}{4}\right)>0$ となる．いま $n\to\infty$ とすると，$0\geqq r\left(\frac{t}{4}\right)>0$ となり，これは矛盾である．▨

一様凸な Banach 空間について，もう 1 つの命題を示しておこう．

$\boldsymbol{R}^+$ から $\boldsymbol{R}^+$ への関数 ω が $\boldsymbol{\Gamma}$ **に属する**とは

（1）　$\omega(0)=0$;

（2）　$r>0\Longrightarrow\omega(r)>0$;

（3）　$t\leqq s\Longrightarrow\omega(t)\leqq\omega(s)$

を満たすときをいう．

定理 3.3.5 (Prüß の定理)　E を一様凸な Banach 空間とする．このとき，任意の $R>0$ に対して，ある $\omega_R\in\Gamma$ が存在して，

$$\begin{aligned}&x, y\in B_R[0],\ x^*\in J(x),\ y^*\in J(y)\\&\Longrightarrow(x-y, x^*-y^*)\geqq\omega_R(\|x-y\|)\|x-y\|\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$B_R[0]=\{x\colon \|x\|\leqq 1\}$ である．

証明　$R>0$ を固定する．いま $\boldsymbol{R}^+$ から $\boldsymbol{R}^+$ への関数 ω_R を，

$r=0$ のとき，$\omega_R(0)=0$;

$r\in(0, 2R]$ のとき，

$$\omega_R(r)=\inf\left\{\frac{(x-y, x^*-y^*)}{\|x-y\|}\colon x, y\in B_R[0], \|x-y\|\geqq r, x^*\in J(x),\ y^*\in J(y)\right\};$$

$r \in (2R, \infty)$ のとき，$\omega_R(r) = \omega_R(2R)$

と定義すると，定理 3.2.1 の (iv) より，$(x-y, x^*-y^*) \geqq 0$ なので，$r \geqq 0$ のとき $\omega_R(r) \geqq 0$ となる．また ω_R が増加関数であることは明らかである．つぎに，$r>0$ のとき $\omega_R(r)>0$ となることを示す．いま $\omega_R(r)=0$ となる $r \in (0, 2R]$ が存在したと仮定すると，ω_R の定義より，

$$\{x_n\}, \{y_n\} \subset B_R[0], \quad x_n^* \in J(x_n), \quad y_n^* \in J(y_n),$$
$$\|x_n - y_n\| \geqq r > 0, \quad (x_n - y_n, x_n^* - y_n^*) \to 0$$

となるような $\{x_n\}, \{y_n\}, \{x_n^*\}, \{y_n^*\}$ が存在する．

$$(\|x_n\| - \|y_n\|)^2 \leqq (x_n - y_n, x_n^* - y_n^*)$$

だから $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = a > 0$ と仮定できる．

$$(x_n + y_n, x_n^* + y_n^*) = 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - (x_n - y_n, x_n^* - y_n^*)$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n, x_n^* + y_n^*) = 4a^2$ である．これより

$$4a^2 \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| (\|x_n\| + \|y_n\|) = 2a \varliminf_{n\to\infty} \|x_n + y_n\|$$

となる．よって，$2a \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|x_n + y_n\|$ を得る．$\varlimsup_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leqq 2a$ は明らかなので $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2a$ を得る．E は (uc) なので $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ である．ところが，$\|x_n - y_n\| \geqq r > 0$ なので，これは矛盾である．よって $\omega_R(r) > 0$ である．▨

定理 3.3.6　Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能ならば，双対写像 J: $E \to E^*$ は連続である．ただし，E, E^* の位相はノルム位相である．

証明　J が $S(E)$ から $S(E^*)$ への写像として連続であることを示せば十分である(問題 3.3.1)．$x_n \to x$，$x_n, x \in S(E)$ とする．このとき

$$0 \leqq 1 - (x, J(x_n)) = (x_n, J(x_n)) - (x, J(x_n))$$
$$= (x_n - x, J(x_n)) \leqq \|x_n - x\| \|J(x_n)\| = \|x_n - x\| \to 0$$

であるので，$(x, J(x_n)) \to 1$ である．一方 E のノルムは Fréchet 微分可能であり，かつ定理 3.2.4 の証明より

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} = (y, J(x))$$

なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$0 < |t| \leqq \delta \Longrightarrow \left| \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} - (y, J(x)) \right| < \varepsilon \qquad (\forall y \in S(E))$$

である．$0 < t \leqq \delta$ とすると

$$\|x + ty\| - 1 < t\varepsilon + t(y, J(x)),$$
$$\|x - ty\| - 1 < t\varepsilon - t(y, J(x)).$$

ここで，$(x, J(x_n)) \to 1$ であるので，十分大きい n に対して，

$$1 \leqq (x, J(x_n)) + t\varepsilon$$

となるようにできる．また，

$$\begin{aligned}1-t\varepsilon \leqq (x, J(x_n)) &= (x, J(x)+J(x_n))-1\\ &= (x+ty, J(x))+(x-ty, J(x_n))-1-t(y, J(x)-J(x_n))\\ &\leqq \|x+ty\|+\|x-ty\|-1-t(y, J(x)-J(x_n))\\ &\leqq t\varepsilon+t(y, J(x))+1+t\varepsilon-t(y, J(x))+1\\ &\quad -1-t(y, J(x)-J(x_n))\\ &= 2t\varepsilon+1-t(y, J(x)-J(x_n))\end{aligned}$$

であるので，$(y, J(x)-J(x_n)) \leqq 3\varepsilon$ $({}^\forall y \in S(E))$ である．同様にして，

$$(y, J(x_n)-J(x)) \leqq 3\varepsilon \qquad ({}^\forall y \in S(E))$$

である．よって十分大きい n に対して

$$|(y, J(x)-J(x_n))| \leqq 3\varepsilon \qquad ({}^\forall y \in S(E))$$

である．これは $\|J(x)-J(x_n)\| \leqq 3\varepsilon$ を意味するので定理の証明は完了する．▨

同様の方法を用いると，つぎの定理も得られる(問題 3.3.2).

定理 3.3.7　Banach 空間 E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能ならば，双対写像 J: $E \to E^*$ は E の有界集合上で一様連続である．ただし，E の位相はノルム位相であり，E^*の位相は弱*位相である．

また，Banach 空間のノルムが一様 Fréchet 微分可能ならば，つぎの定理が成り立つ．

定理 3.3.8　Banach 空間 E のノルムが一様 Fréchet 微分可能であるための必要十分条件は，E^* が一様凸となることである．

証明　まず必要性を示す．$f, g \in S(E^*)$，$\|f-g\| \geqq \varepsilon > 0$ としよう．E のノルムは一様 Fréchet 微分可能であるから，この $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在し，

$$0 < |t| \leqq \delta \Longrightarrow \left| \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} - (y, J(x)) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \qquad ({}^\forall x, y \in S(E))$$

である．$0 < t < \delta$ となる t を固定すると

$$\|x+ty\| < \frac{1}{8}t\varepsilon + t(y, J(x)) + 1,$$

$$\|x-ty\| < \frac{1}{8}t\varepsilon - t(y, J(x)) + 1.$$

よって，

$$\|x+ty\|+\|x-ty\| < 2+\frac{1}{4}t\varepsilon \qquad ({}^\forall x, y \in S(E)).$$

また，$\|f-g\| \geqq \varepsilon > 0$ なので，$(f-g)(y_0) > \frac{\varepsilon}{2}$ となる $y_0 \in S(E)$ が存在するが，この y_0 に対して，$(f-g)(ty_0) > \frac{1}{2}t\varepsilon$ である．そこで，

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \sup\{(f+g)(x)\colon x\in S(E)\}\\ &= \sup\{f(x+ty_0)+g(x-ty_0)-(f-g)(ty_0)\colon x\in S(E)\}\\ &< \sup\left\{\|x+ty_0\|+\|x-ty_0\|-\frac{1}{2}t\varepsilon\colon x\in S(E)\right\}\\ &\leqq 2+\frac{1}{4}t\varepsilon-\frac{1}{2}t\varepsilon=2-\frac{1}{4}t\varepsilon\end{aligned}$$

である．これは E^* が一様凸であることを意味する．

十分性を示す．$x, y\in S(E)$ とする．このとき，定理 3.2.6 の証明のようにして $\lambda>0$ に対しては

$$\frac{(y, J(x))}{\|x\|}\leqq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\leqq\frac{(y, J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}$$

であり，$\lambda<0$ のときは

$$\frac{(y, J(x))}{\|x\|}\geqq\frac{\|x+\lambda y\|-\|x\|}{\lambda}\geqq\frac{(y, J(x+\lambda y))}{\|x+\lambda y\|}$$

である．ここで定理 3.2.3 を使えば，E のノルムが一様 Fréchet 微分可能であることがわかる． ▨

問 題 3.3

1. E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ Banach 空間とし，J を E から E^* への双対写像とする．このとき，J が E 上で連続であることを，J が $S(E)$ から $S(E^*)$ への写像として連続であることを用いて証明せよ．ただし，E, E^* の位相はノルム位相である．

2. Banach 空間 E のノルムが一様 Gâteaux 微分可能ならば，双対写像 J は E の有界集合上で一様連続である．これを示せ．ただし，E の位相はノルム位相であり，E^* の位相は弱*位相である．

3. E を Banach 空間とする．E^* が Fréchet 微分可能なノルムをもつならば，つぎの (i), (ii), (iii) が成り立つことを示せ．

(i) E は回帰的である;

(ii) E は狭義凸である;

(iii) $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n\|\to\|x\| \Longrightarrow x_n\to x$.

注 逆に Banach 空間 E が (i), (ii), (iii) を満たせば，E^* は Fréchet 微分可能なノルムをもつことも知られている．

注 E が一様凸な Banach 空間ならば，E^{**} も一様凸である．よって定理 3.3.8 より E^* のノルムは一様 Fréchet 微分可能である．だから，Banach 空間 E が一様凸ならば (i), (ii), (iii) の性質を満たす．

3.4　nonexpansive 写像の不動点定理

§2.1 では，Hilbert 空間における 1 つの nonexpansive 写像の不動点定理について学んだが，この節では，Banach 空間での nonexpansive 写像のそれについて学ぶことにする．

E を Banach 空間とし，C を E の部分集合とする．このとき，C から E への写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは，すべての $x, y \in C$ に対し，つねに

$$\|Tx-Ty\| \leqq \|x-y\|$$

が成り立つことであった．

まず nonexpansive 写像に対するつぎの定理からはじめよう．

定理 3.4.1　C を Banach 空間の空でない閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，つぎの条件は同値である．

(1)　ある $x \in C$ に対して，$\{T^n x\}$ は有界である；

(2)　C の空でない有界な閉凸集合 M で，$TM \subset M$ となるものが存在する；

(3)　C の中の有界な点列 $\{x_n\}$ で，$x_n - Tx_n \to 0$ となるものが存在する．

証明　(1)⟹(2)：ある $x \in C$ に対して，$\{T^n x\}$ は有界であるとしよう．μ を Banach limit とし，

$$g(y) = \mu_n \|T^n x - y\| \qquad (\forall y \in C),$$

$$r = \inf\{g(y) : y \in C\}$$

とする．このとき，$M = \{z \in C : g(z) \leqq r+1\}$ とすると，g は C 上で連続な凸関数であるから，M は閉凸集合になる．また，M が空でないことは，下限の定義から明らかである．M が有界となることは $\{T^n x\}$ が有界であることよりわかる(問題 3.4.1)．$TM \subset M$ であることは，$z \in M$ に対して，

$$\mu_n \|T^n x - Tz\| = \mu_n \|T^{n+1} x - Tz\| \leqq \mu_n \|T^n x - z\|$$

であることからわかる．よって M が求める有界な閉凸集合である．

(2)⟹(3)：M を C の空でない有界な閉凸集合で，$TM \subset M$ となるものとする．$x_0 \in M$ を固定し，$n = 2, 3, \cdots$ に対して，M から M への写像 T_n を

$$T_n x = \frac{1}{n} x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) Tx \qquad (\forall x \in M)$$

で定義する．このとき，T_n は縮小写像である．よって，T_n は M の中にただ 1 つの不動点 x_n をもつ．M は有界なので，$\{x_n\}$ は有界となり，$n \to \infty$ のとき，

$$\|x_n - Tx_n\| = \left\|\frac{1}{n}x_0 + \left(1-\frac{1}{n}\right)Tx_n - Tx_n\right\|$$
$$= \frac{1}{n}\|x_0 - Tx_n\| \to 0$$

となる．よって，$x_n - Tx_n \to 0$ がいえた．

(3)$\Longrightarrow$(1)：$\{x_n\}$ を有界な点列で，$x_n - Tx_n \to 0$ となるものとする．μ を Banach limit とし，

$$g(x) = \mu_n \|x_n - x\| \qquad (^\forall x \in C)$$

とする．このとき，

$$M = \{z \in C:\ g(z) \leqq \inf_{y \in C} g(y) + 1\}$$

とすると，(1)$\Longrightarrow$(2) の証明のようにして，M は空でない有界閉凸集合となる．$z \in M$ に対して，

$$\mu_n \|x_n - Tz\| \leqq \mu_n(\|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tz\|)$$
$$= \mu_n \|Tx_n - Tz\| \leqq \mu_n \|x_n - z\|$$

であるから，$Tz \in M$ である．これは M が T のもとで不変であることを意味する．よって，M の任意の元 x に対して，$\{T^n x\}$ は有界となる．　▨

前定理と関連して，つぎのような定理が Kohlberg と Neyman によって証明されているので紹介しておこう．

定理 3.4.2　C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，ある $f \in S(E^*)$ が存在して，すべての $x \in C$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{T^n x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{T^n x}{n}\right\| = \inf_{y \in C}\|Ty - y\|$$

が成り立つ．

証明　T は nonexpansive なので，任意の $x, y \in C$ に対して，$n \to \infty$ のとき

$$\left\|\frac{T^n x}{n} - \frac{T^n y}{n}\right\| \leqq \frac{1}{n}\|x - y\| \to 0$$

となる．また

$$\left\|\frac{T^n y}{n}\right\| \leqq \frac{1}{n}(\|T^n y - T^{n-1}y\| + \|T^{n-1}y - T^{n-2}y\| + \cdots + \|Ty - y\| + \|y\|)$$
$$\leqq \frac{1}{n}\cdot n\|Ty - y\| + \frac{1}{n}\|y\| = \|Ty - y\| + \frac{1}{n}\|y\|$$

なので，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{T^n y}{n}\right\| \leqq \|Ty - y\|$ となる．よって，$f \in S(E^*)$ ならば

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f\left(\frac{T^n x}{n}\right) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{T^n x}{n}\right\| \leqq \inf_{y \in C}\|Ty - y\|. \qquad (*)$$

よって定理を証明するためには，ある $x\in C$ に対して，

$$\varliminf_{n\to\infty} f\left(\frac{T^n x}{n}\right) \geqq \inf_{y\in C}\|Ty-y\|$$

となるような $f\in S(E^*)$ の存在を証明すればよい．一般性を失うことなく，$0\in C$ を仮定してもよいので，いま $\inf_{y\in C}\|Ty-y\|=\alpha$ とおくと

$$f\left(\frac{T^n 0}{n}\right)\geqq\alpha, \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{**}$$

となるような $f\in S(E^*)$ の存在を証明すればよいことになる．

$0\in C$ なので，$r>0$ ならば

$$T_r(x)=\frac{r}{r+1}0+\frac{1}{r+1}Tx$$

とすると，$T_r=\dfrac{T}{r+1}$ は C から C への縮小写像となる．T_r のただ1つの不動点を $x(r)$ とすると $Tx(r)=(r+1)x(r)$ となる．明らかに

$$\|rx(r)\|=\|Tx(r)-x(r)\|\geqq\alpha \qquad (^\forall r>0).$$

ここで，$\alpha=0$ ならば，(*) より $\dfrac{T^n x}{n}\to 0$ となり，よって任意の $f\in S(E^*)$ に対して $\lim_{n\to\infty} f\left(\dfrac{T^n x}{n}\right)=0$ となる．だから $\alpha>0$ の場合を考えよう．

その前につぎの補助定理を証明しておく．

補助定理 3.4.3　$r>0$ と $x\in C$ に対して，

$$\|Tx-x(r)\|\leqq\|x-x(r)\|-\alpha+2r\|Tx\|.$$

証明

$$\begin{aligned}\|Tx-x(r)\| &= (1+r)\|Tx-x(r)\|-r\|Tx-x(r)\| \\ &\leqq \|Tx-(1+r)x(r)\|-\|rx(r)\|+2r\|Tx\| \\ &= \|Tx-Tx(r)\|-\|rx(r)\|+2r\|Tx\| \\ &\leqq \|x-x(r)\|-\alpha+2r\|Tx\|\end{aligned}$$

であるから，補助定理は証明された． ▨

定理の証明を続けよう．$x\neq 0$ ならば，$\|f_x\|=1$，$f_x(x)=\|x\|$ となるような $f_x\in E^*$ が存在する．明らかに

$$\|x\|-f_x(y)=f_x(x-y)\leqq\|x-y\|$$

なので，

$$\|x-y\|\leqq\|x\|-\beta\Longrightarrow\beta\leqq f_x(y). \tag{***}$$

補助定理を $x=0, T0, \cdots, T^{n-1}0$ の場合に適用して，その和をとると

$$\|x(r)-T^n 0\|\leqq\|x(r)\|-n\alpha+2r\sum_{k=1}^{n}\|T^k 0\|$$

を得る．だから (***) によって

$$f_{x(r)}(T^n 0) \geqq n\alpha - 2r\sum_{k=1}^{n} \|T^k 0\|.$$

それゆえ

$$f_{x(r)}\left(\frac{T^n 0}{n}\right) \geqq \alpha - \frac{2r}{n}\sum_{k=1}^{n} \|T^k 0\|.$$

$\{f_{x(r)}\}$ の弱*位相での収積点を $f \in E^*$ とすると，$\|f\| \leqq 1$ である．よってすべての n に対して，

$$f\left(\frac{T^n 0}{n}\right) \geqq \alpha.$$

したがって f は (**) を満たす．$g = \dfrac{f}{\|f\|}$ は $S(E^*)$ の元であり，(**) を満たす．よって定理は証明されたことになる． ▨

Hilbert 空間では，C が有界閉凸集合ならば，C の上で作用するどのような nonexpansive 写像も不動点をもったが，一般の Banach 空間では，そうはいかず，前の 2 つの定理からわかるように

$$\inf_{y \in C} \|Ty - y\| = 0 \qquad (*)$$

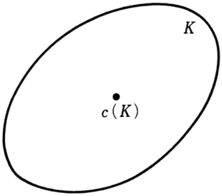
という性質が証明されるだけである．ここで 1 つ定義を与えておく．

Banach 空間の閉凸集合 C が，nonexpansive 写像に対して **almost fixed point property** (略して，**AFPP**)をもつとは，C 上で作用するどんな nonexpansive 写像 T に対しても，つねに (*) が成り立つときをいう．

Banach 空間の有界閉凸集合はつねに AFPP をもつが，他にどんな条件をつければ，不動点をもつようになるのだろうか．今後，それについて論じてみよう．

K を Banach 空間 E の部分集合とする．このとき，

$$r_x(K) = \sup\{\|x-y\| : y \in K\},$$
$$r(K) = \inf\{r_x(K) : x \in K\},$$
$$c(K) = \{x \in K : r_x(K) = r(K)\}$$



を定義する．また，$\delta(K)$ によって K の直径を表すことにする．E の閉凸集合 C が**正規構造**(normal structure)をもつとは，C の 2 点以上含む任意の有界閉凸集合 K が，$r_x(K) < \delta(K)$ となるような点 $x \in K$ を含むときをいう．一様凸な Banach 空間の閉凸集合や Banach 空間のコンパクト凸集合は正規構造をもっているが，その証明は問題として残しておこう(問題 3.4.2，3.4.3)．

補助定理 3.4.4 K を Banach 空間 E の弱コンパクトな凸集合とする．このとき，$c(K)$ は空でない閉凸集合である．

証明 $x \in K$ と自然数 n に対して

$$F(x,n)=\left\{y \in K:\ \|x-y\| \leqq r(K)+\frac{1}{n}\right\}$$

とする．このとき，$C_n=\bigcap_{x \in K} F(x,n)$ は空でない閉凸集合であり，$C_n \supset C_{n+1}$ ($n=1,2,\cdots$) を満たしている．K は弱コンパクトであるから

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \phi$$

であることがわかる．$c(K)=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ は明らかであるから補助定理がいえた．▨

補助定理 3.4.5 K を 2 点以上含む正規構造をもつ弱コンパクトな凸集合とする．このとき，$\delta(c(K))<\delta(K)$ である．

証明 K は正規構造をもつので，$z,w \in c(K)$ とすると

$$\|z-w\| \leqq r_z(K)=r(K)<\delta(K)$$

である．よって

$$\begin{aligned}\delta(c(K)) &= \sup\{\|z-w\|:\ z,w \in c(K)\}\\ &\leqq r(K)<\delta(K)\end{aligned}$$

となり証明は完了する．▨

上の 2 つの補助定理を用いて，nonexpansive 写像に対する Kirk の不動点定理を証明しよう．

定理 3.4.6 (Kirk の不動点定理)　C を Banach 空間 E の弱コンパクトな凸集合とし，正規構造をもつとする．T を C から C への nonexpansive 写像とするとき，$Tx_0=x_0$ となるような点 $x_0 \in C$ が存在する．

証明 $X=\{K_\alpha\}$ を $TK_\alpha \subset K_\alpha$ を満たす C の空でない閉凸集合 K_α の族とする．Zorn の補題を用いて，X の極小な元 K の存在がわかる．この集合 K が 1 点であることを示そう．もし K が 2 点以上含むとする．K は弱コンパクトで凸な集合だから $c(K) \neq \phi$ である．いま $x \in c(K)$ に対して，任意の $y \in K$ をとると，

$$\|Tx-Ty\| \leqq \|x-y\| \leqq r_x(K)=r(K)$$

であるから，$M=\{y \in E:\ \|Tx-y\| \leqq r(K)\}$ とおくと，$T(K) \subset M$ となる．だから $T(K \cap M) \subset K \cap M$ となる．K は X の極小な元であるから，$K \subset M$ となる．よって $r_{Tx}(K) \leqq r(K)$ である．定義より $r(K) \leqq r_{Tx}(K)$ なので $r_{Tx}(K)=r(K)$ となり，$Tx \in c(K)$ を得る．すなわち K が 2 点以上含むとすると，

X の中に K よりも完全に小さい $c(K)$ が存在することになり，K の極小性に反する．だから K は1点であり，この点が T の不動点である． ▨

この節の最後に，Banach 空間の閉凸集合が nonexpansive 写像に対して AFPP をもつための必要十分条件を与えておこう．

Hilbert 空間の場合と同様，Banach 空間 E の閉凸集合 C が**線形的に有界**であるとは，C と E の任意の直線がつねに有界な交わりをもつときをいう．

定理 3.4.7 (AFPP をもつための同値条件) 回帰的な Banach 空間の閉凸集合 C が nonexpansive 写像に対して AFPP をもつための必要十分条件は，C が線形的に有界となることである．

証明 C を回帰的な Banach 空間の閉凸集合とし，E^* を E の共役空間とする．必要性を示すために，ある $a \neq 0$ に対して

$$\{y+ta:\ 0 \leqq t < \infty\} \subset C$$

とする．$x \in C$ ならば

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)x+\frac{y+ta}{t} \in C \qquad (\forall t \geqq 1)$$

となるから，$Sx=x+a$ によって，C から C への写像 S を定義することができる．この写像は nonexpansive であり，$\|x-Sx\|=\|a\|$ $(\forall x \in C)$ である．

逆に，T: $C \to C$ を nonexpansive 写像とし，$d=\inf\{\|x-Tx\|:\ x \in C\}$ とすると，任意の $x \in C$ に対して，定理 3.4.2 の証明と同様にして，ある $j \in E^*$ $(\|j\|=d)$ が存在して，

$$\left(\frac{x-T^n x}{n},\ j\right) \geqq d^2 \qquad (\forall n=1, 2, \cdots)$$

とできる．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\|T^n x\|}{n}=d$ であるから，$\left\{\dfrac{T^n x}{n}\right\}$ の部分点列である点 w に弱収束するものがとれる．明らかに $\|w\| \leqq d$ である．一方，

$$\|w\|d=\|w\|\|j\| \geqq (-w, j) \geqq d^2$$

であるから，$\|w\|=d$ となる．いまや $y \in C$ とすると，

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)y+\frac{1}{n}T^n x \in C \qquad (\forall n=1, 2, \cdots)$$

なので $y+w \in C$ である．だから，

$$y+mw \in C \qquad (\forall m=1, 2, \cdots)$$

となる．C は線形的に有界なので，$w=0$ となる．よって，$d=0$ となる． ▨

注 Banach 空間の閉凸集合 C が nonexpansive 写像に対して**不動点性**をもつ，または **fixed point property**(略して，**FPP**)をもつとは，C 上で作用するどんな nonexpansive 写像もつねに不動点をもつときをいう．Hilbert 空間では，C が nonexpansive 写像に対

して FPP をもつための 必要十分条件は C が 有界となることであった．しかしながら，このことは Banach 空間では(一様凸な Banach 空間のときでさえ)わかっていない．すなわち，C を一様凸な Banach 空間の閉凸集合とするとき，C が nonexpansive 写像に対して FPP をもつならば C は有界か，という問題はまだ解決されていない．

問　題 3.4

1. C を Banach 空間 E の空でない閉凸集合とし，$\{x_n\}$ を E の有界な点列とする．また μ を Banach limit とする．このとき，

$$M=\{z\in C:\ \mu_n\|x_n-z\|\leqq 1+\inf_{y\in C}\mu_n\|x_n-y\|\}$$

は有界集合である．これを示せ．

2. 一様凸な Banach 空間 E の閉凸集合 C は正規構造をもつ．これを示せ．

3. Banach 空間 E のコンパクトで凸な部分集合 C は正規構造をもつ．これを示せ．

3.5 写像族に対する不動点定理

この節では，nonexpansive 写像の族に対する不動点定理をいくつか証明する．写像が線形であったり，空間が Hilbert 空間であれば，nonexpansive 写像の不動点の集合は凸集合となるので，可換な族に対する不動点定理は比較的楽に証明できるが，一般の Banach 空間や非可換な族に対してはそうはいかない．

まず，nonexpansive 写像の有限個の族に対する不動点定理を証明する．

定理 3.5.1 C を Banach 空間の弱コンパクトで凸な集合とし，正規構造をもつものとする．$\mathcal{S}=\{T_1, T_2, \cdots, T_n\}$ を C から C への nonexpansive 写像の有限個の族とし，$T_iT_j=T_jT_i$ を満たすものとする．このとき，

$$T_ix_0=x_0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

となる $x_0\in C$ が存在する．

証明 $X=\{K\subset C\colon K$ は空でない閉凸集合，$T_iK\subset K\ (i=1,2,\cdots,n)\}$ とする．すると Zorn の補題より，X の中に極小な元 K^* が存在する．W を写像 $T_1T_2\cdots T_n$ の K^* における不動点の集合とすると，Kirk の定理(定理 3.4.6)より，$W\neq\phi$ である．さらに任意の i に対して $T_iW=W$ である．実際 $w\in W$ とすると，任意の i に対して，$T_iw=T_iT_1T_2\cdots T_nw=T_1T_2\cdots T_nT_iw$ なので $T_iw\in W$ である．これは $T_iW\subset W\ (i=1,2,\cdots,n)$ を意味する．一方 $w\in W$ に対して，

$$w=T_1T_2\cdots T_nw=T_iT_1T_2\cdots T_{i-1}T_{i+1}\cdots T_nw=T_iw'$$

となるので，$W\subset T_iW\ (i=1,2,\cdots,n)$ もわかる．よって $T_iW=W\ (i=1,2,\cdots,n)$ である．$H=\overline{\mathrm{co}}\,W$ とする．もし $\delta(H)>0$ ならば C は正規構造をもつので

$$r=r_x(H)<\delta(H)$$

となる $x\in H$ が存在する．

$$A=\{x\in K^*\colon r_x(H)\leqq r\}$$

とする．すると A は空でない閉凸集合である．さらに，

$$A=\{x\in K^*\colon r_x(W)\leqq r\}$$

でもある．よって $x\in A$ ならば，任意の i と $w\in W$ に対して

$$\|T_ix-w\|=\|T_ix-T_iw'\|\leqq\|x-w'\|\leqq r \qquad (\text{ただし，}w'\in W)$$

となるので，$T_ix\in A$ である．よって $T_iA\subset A\ (i=1,2,\cdots,n)$．$K^*$ の極小性

より，$A=K^*$ である．だから

$$\delta(H)=\delta(K^*\cap H)=\delta(A\cap H)\leqq r<\delta(H)$$

である．これは矛盾である．よって $\delta(H)=0$ となり，H は1点からなる．この点が $T_1, T_2, \cdots, T_n$ の共通な不動点である．▨

この定理は Banach 空間に狭義凸という条件をつけるとつぎの定理にまで拡張できる．

定理 3.5.2 E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E の空でない弱コンパクトな凸集合とし，正規構造をもつものとする．$\mathcal{S}=\{T_i\colon i\in I\}$ を C から C への nonexpansive 写像の族とし，$T_iT_j=T_jT_i$ $(i,j\in I)$ を満たすとする．このとき，$T_ix_0=x_0$ $(i\in I)$ となる $x_0\in C$ が存在する．

定理を証明する前につぎの補助定理を証明しておこう．

補助定理 3.5.3（狭義凸では不動点集合は凸）E を狭義凸な Banach 空間とし，$C\subset E$ を空でない凸集合とする．T を C から C への nonexpansive 写像とし，$F(T)$ を T の不動点の集合とする．このとき $F(T)$ は凸集合である．

証明 $x, y\in F(T)$ としよう．α を $0\leqq\alpha\leqq 1$ とし，$\alpha x+(1-\alpha)y=z$ とすると

$$\|x-Tz\|=\|Tx-Tz\|\leqq\|x-z\|,$$
$$\|y-Tz\|=\|Ty-Tz\|\leqq\|y-z\|$$

であるので，

$$\|x-y\|\leqq\|x-Tz\|+\|Tz-y\|\leqq\|x-z\|+\|z-y\|=\|x-y\|.$$

よって $\|x-z\|=\|x-Tz\|$, $\|y-z\|=\|y-Tz\|$ となる．空間が狭義凸であるから $z=Tz$ となる(問題 3.5.2)．これは $F(T)$ が凸集合であることを意味する．▨

定理 3.5.2 の証明 $\{F(T_i)\colon i\in I\}$ は閉凸集合の族，すなわち，弱コンパクトで凸な集合の族である．前定理より，この中から有限個とり出すと必ず共通部分をもつから，C の弱コンパクト性から

$$\bigcap_{i\in I} F(T_i)\neq\phi$$

となる．よって定理が証明された．▨

つぎに nonexpansive 写像の非可換な族に対する Lau–高橋の不動点定理を証明しよう．その前に，いろいろなところで有用と思われる2つの補助定理を証明しておく．

補助定理 3.5.4 C を (uG) な Banach 空間 E の空でない凸集合，S をある指標の集合，$\{x_t\colon t\in S\}$ を E の有界な集合とする．X を $B(S)$ の線形部分空間で1を含み，かつ任意の $z\in C$ と $u\in E$ に対して

$$h(t)=\|x_t-z\|^2,$$

$$g(t)=(u,J(x_t-z))$$

で定義される S 上の関数 h,g を含むものとする．μ を X 上の mean とし，$z_0 \in C$ とする．このとき，

$$\mu_t\|x_t-z_0\|^2=\min_{y\in C}\mu_t\|x_t-y\|^2$$

である必要十分条件は

$$\mu_t(z-z_0, J(x_t-z_0))\leqq 0 \qquad (\forall z\in C)$$

となることである．ただし，J は E の双対写像である．

証明　$$\mu_t\|x_t-z_0\|^2=\min_{y\in C}\mu_t\|x_t-y\|^2$$

とする．このとき，$z\in C$ と $0\leqq\lambda\leqq 1$ となる λ に対し，定理 3.2.1 の（v）より

$$\begin{aligned}\|x_t-z_0\|^2&=\|x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z+(1-\lambda)(z-z_0)\|^2\\&\geqq\|x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z\|^2+2(1-\lambda)(z-z_0,J(x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z)).\end{aligned}$$

また，E は (uG) であるから，定理 3.3.7 より双対写像 J は E の有界集合上で一様連続となるので(ただし，E の位相はノルムによるものであり，E^* の位相は弱*位相である)，いま任意の $\varepsilon>0$ に対して，λ を 1 に十分近くとることにより

$$|(z-z_0,J(x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z)-J(x_t-z_0))|<\varepsilon$$

とできる．よって

$$\begin{aligned}(z-z_0,J(x_t-z_0))&<\varepsilon+(z-z_0,J(x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z))\\&\leqq\varepsilon+\frac{1}{2(1-\lambda)}\{\|x_t-z_0\|^2-\|x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z\|^2\}.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\mu_t(z-z_0,J(x_t-z_0))&\leqq\varepsilon+\frac{1}{2(1-\lambda)}\{\mu_t\|x_t-z_0\|^2-\mu_t\|x_t-\lambda z_0-(1-\lambda)z\|^2\}\\&\leqq\varepsilon\end{aligned}$$

となる．これは，任意の $z\in C$ に対して

$$\mu_t(z-z_0,J(x_t-z_0))\leqq 0$$

となることを意味する．

逆を証明する．$z\in C$ としよう．このとき，定理 3.2.1 の（v）より

$$\|x_t-z\|^2-\|x_t-z_0\|^2\geqq 2(z_0-z,J(x_t-z_0)) \qquad (\forall t\in S)$$

であり，かつ

$$\mu_t(z-z_0,J(x_t-z_0))\leqq 0 \qquad (\forall z\in C)$$

であるから

$$\mu_t\|x_t-z_0\|^2=\min_{z\in C}\mu_t\|x_t-z\|^2$$

となることは明らかである．　▨

注　E を Hilbert 空間とし，$x_t=x$ $(t\in S)$ とすると，この補助定理は補助定理 2.1.3 となる．

補助定理 3.5.5　E を (uc) でかつ (us) な Banach 空間とする．C を E の閉で凸な集合，S を指標の集合，$\{x_t\colon t\in S\}$ を E の有界な集合とする．X を $B(S)$ の線形部分空間で 1 を含み，かつ $z\in C$ と $u\in E$ に対して

$$h(t)=\|x_t-z\|^2,$$
$$g(t)=(u, J(x_t-z))$$

で定義される S 上の関数 h, g をすべて含むものとする．このとき，X 上の mean μ に対して，集合

$$M=\{u\in C\colon \mu_t\|x_t-u\|^2=\min_{z\in C}\mu_t\|x_t-z\|^2\}$$

はただ 1 つの点からなる．

証明

$$g(z)=\mu_t\|x_t-z\|^2 \qquad (\forall z\in C),$$
$$r=\inf\{g(z)\colon z\in C\}$$

とする．このとき，g は C 上で凸関数であり，かつ連続である．また $\|z_n\|\to\infty$ のとき，$g(z_n)\to\infty$ でもあるので，定理 1.3.10 より，$g(u)=r$ となる $u\in C$ が存在する．よって M は空でない集合である．補助定理 3.5.4 より，$u\in M$ である必要十分条件は，

$$\mu_t(z-u, J(x_t-u))\leqq 0 \qquad (\forall z\in C)$$

であるから，これを用いて M がただ 1 点からなることを示す．$u, v\in M$ とし，$u\neq v$ としよう．このとき，定理 3.3.5 により

$$(x_t-u-(x_t-v), J(x_t-u)-J(x_t-v))\geqq k \qquad (\forall t\in S)$$

となる正数 k が存在する．よって

$$\mu_t(v-u, J(x_t-u)-J(x_t-v))\geqq k>0. \qquad (*)$$

一方，$u, v\in M$ なので

$$\mu_t(u-v, J(x_t-u))\geqq 0,$$
$$\mu_t(v-u, J(x_t-v))\geqq 0.$$

2 つの式を加えると

$$\mu_t(u-v, J(x_t-u)-J(x_t-v))\geqq 0$$

となる．これは (*) の式と矛盾する．よって $u=v$ である．　▨

注　E を Hilbert 空間とし，$x=x_t$ $(t\in S)$ とすると，補助定理 3.5.5 は定理 2.1.2 となる．

定理 3.5.6　E を (uc) でかつ (us) な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．S を $C(S)$ が left invariant mean をもつような semi-

topological 半群とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする．もし，ある $x\in C$ が存在して，$\{T_tx\colon t\in S\}$ が有界であるならば

$$T_tx_0=x_0 \qquad (\forall t\in S)$$

となる $x_0\in C$ が存在する．

証明 μ を $C(S)$ 上の left invariant mean とする．このとき，

$$M=\{u\in C\colon \mu_t\|T_tx-u\|^2=\min_{z\in C}\mu_t\|T_tx-z\|^2\}$$

とすると，M は T_s $(s\in S)$ のもとで不変である．実際，$u\in M$ ならば，任意の $s\in S$ に対して

$$\begin{aligned}\mu_t\|T_tx-T_su\|^2&=\mu_t\|T_{st}x-T_su\|^2\\&=\mu_t\|T_sT_tx-T_su\|^2\\&\leqq\mu_t\|T_tx-u\|^2\end{aligned}$$

となるから，$T_su\in M$ である．一方補助定理 3.5.5 によって，M はただ 1 つの点からなる．この点は T_s $(s\in S)$ の共通な不動点である． ▨

定理 2.4.4 の証明と同様にして， left reversible 半群に対するつぎの不動点定理を証明することができる．

定理 3.5.7 E を一様凸な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．S を left reversible な semitopological 半群とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする． また C のある元 x に対して，$\{T_tx\colon t\in S\}$ は有界であるとする．このとき，

$$T_sx_0=x_0 \qquad (\forall s\in S)$$

となるような点 $x_0\in C$ が存在する．

証明 C の元 x に対して，$\{T_tx\colon t\in S\}$ は有界であるので，C 上の実数値関数 g を

$$g(z)=\overline{\lim_t}\|T_tx-z\| \qquad (\forall z\in C)$$

で定義すると，g は C 上で連続な凸関数となる．また，$\|z_n\|\to\infty$ のとき，$g(z_n)\to\infty$ でもあるから，定理 1.3.10 を用いて，

$$M=\{u\in C\colon g(u)=\min_{z\in C}g(z)\}$$

が空でない集合である． この集合 M がただ 1 点であることを証明すれば，あとは定理 2.4.4 の証明と同様にできるので， M が 1 点からなることを示そう．

$r=\min_{z\in C}g(z)$ とする．$r=0$ のときは，$u,v\in M$ に対して，

$$\|u-v\|\leqq\overline{\lim_t}\|u-T_tx\|+\overline{\lim_t}\|T_tx-v\|=0$$

であるから M が 1 点であることがわかる．$r>0$ としよう．もし M が 2 点 u,v

を含んだとし，$\|u-v\|=\varepsilon>0$ としよう．このとき，

$$(r+a)\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r+a}\right)\right)<r$$

となるような正数 a を選ぶことができる．$u, v\in M$ なので，$s_1, s_2\in S$ が存在し，

$$\sup_{s_1\leqq t}\|T_tx-u\|<r+a, \quad \sup_{s_2\leqq t}\|T_tx-v\|<r+a \qquad (*)$$

となるようにできる．ここで S は left reversible であるから，$s_1, s_2\leqq s_0$ となるような $s_0\in S$ をとることができる．だから，(*) より

$$\sup_{s_0\leqq t}\|T_tx-u\|<r+a, \quad \sup_{s_0\leqq t}\|T_tx-v\|<r+a$$

となる．これと E が一様凸なので，任意の $t\geqq s_0$ に対して

$$\frac{1}{2}\|T_tx-u+T_tx-v\|=\left\|T_tx-\frac{u+v}{2}\right\|\leqq(r+a)\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r+a}\right)\right)<r$$

を得る．よって $g\left(\frac{u+v}{2}\right)=\overline{\lim_t}\left\|T_tx-\frac{u+v}{2}\right\|<r$ となる．これは r の定義に矛盾する．■

問　題 3.5

1．E を一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．また $\{x_\alpha\}$ を E の有界なネットとする．このとき，

$$g(z)=\overline{\lim_\alpha}\|x_\alpha-z\| \qquad (\forall z\in C)$$

とすると，g は C 上の連続な凸関数となる．また，

$$M=\{u\in C:\ g(u)=\min_{z\in C}g(z)\}$$

とすると，M は 1 点からなる集合である．これを示せ．

2．E を狭義凸な Banach 空間とし，$x, y\in E$ $(x\neq y)$ とする．このとき

$$\|x-z\|=\|x-w\|, \qquad \|z-y\|=\|w-y\|$$
$$\|x-y\|=\|x-z\|+\|z-y\|$$

ならば，$z=w$ である．これを示せ．

3．E を (uc) でありかつ (uG) な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．S を semitopological な半群とし，$\mathcal{S}=\{T_t:\ t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像による S の連続表現とする．また C のある点 x に対して，$\{T_tx:\ t\in S\}$ が有界であるとする．このとき，$z\in C$ と $y\in E$ に対して定義される S 上の連続関数 h, g:

$$h(t)=\|T_tx-z\|^2, \qquad g(t)=(y, J(T_tx-z))$$

は $RUC(S)$ の元となる．これを示せ．ただし，

$$RUC(S)=\{f\in C(S):\ s\to u\Longrightarrow\|r_sf-r_uf\|\to 0\}$$

である．

注 $RUC(S)$ は $C(S)$ の1を含む閉部分空間であり，l_s, r_s $(s \in S)$ のもとで不変であることが知られている．だから，定理3.5.6において $RUC(S)$ が left invariant mean をもつと仮定してもよい．

3.6　増大作用素

この節では，nonexpansive 写像と並んで非線形関数解析学で重要な増大作用素(accretive operator)について勉強することにしよう．

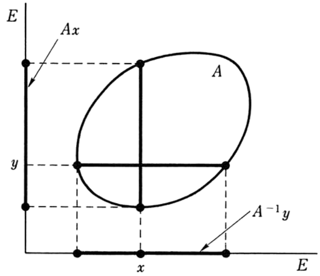
E を Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ としよう．このとき，$x\in E$ に対して

$$Bx=\{y\in E\colon\ (x,y)\in A\}$$

によって，E から E への多価写像 B が定義されるが，逆に多価写像 B によって $E\times E$ の部分集合

$$A=\{(x,y)\colon\ y\in Bx\}$$

も定義でき，これはもとの A と一致するので，$E\times E$ の部分集合を考えることと，E から E への多価写像を考えることとはまったく同じことである．だから，E から E への多価写像 A を $E\times E$ の部分集合と考え，$A\subset E\times E$ と書くこともある．



多価写像 $A\subset E\times E$ に対して，

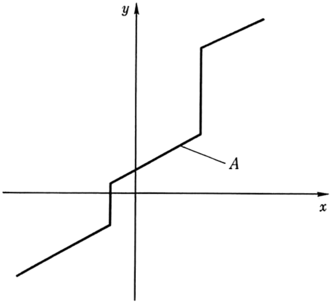
$$D(A)=\{x\in E\colon\ Ax\neq\phi\},$$

$$R(A)=\bigcup\{Ax\colon\ x\in D(A)\}$$

で A の**定義域**，A の**値域**を表すことにしよう．$A^{-1}y$ は集合 $\{x\in E\colon\ y\in Ax\}$ のことである．$A\subset E\times E$ が**増大作用素**(accretive operator)であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in A$ に対してつねに

$$(y_1-y_2, j)\geqq 0$$

となる $j\in J(x_1-x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の双対写像である．



補助定理 3.6.1　$x,y\in E$ とする．このとき，つぎの（1）と（2）は同値である．

（1）　すべての $\lambda\geqq 0$ に対して，$\|x\|\leqq\|x+\lambda y\|$ である；

（2）　$(y,f)\geqq 0$ となる $f\in J(x)$ が存在する．

証明 （1）$\Longrightarrow$（2）：$x=0$ のときは，$J(0)=0$ であるから（2）はつねに成立する．$x\neq 0$ とし，$f_\lambda\in J(x+\lambda y)$ $(\lambda>0)$ とする．このとき，$0<\|x\|\leqq\|x+\lambda y\|$ なので $f_\lambda\neq 0$ である．よって

$$g_\lambda=\frac{f_\lambda}{\|f_\lambda\|}$$

とおくと，$\|g_\lambda\|=1$ であり，$\{g_\lambda:\ \lambda>0\}$ は E^* の閉球 $B^*=\{g\in E^*:\ \|g\|\leqq 1\}$ に含まれる．B^* は弱*コンパクトなので，$\{g_\lambda\}$ の部分ネット $\{g_{\lambda_\alpha}\}$ が存在し，

$$\lim_\alpha(u, g_{\lambda_\alpha})=(u, g) \qquad (^\forall u\in E)$$

となる $g\in B^*$ が存在すると仮定できる．一方

$$\begin{aligned}\|x\|\leqq\|x+\lambda_\alpha y\|&=(x+\lambda_\alpha y, g_{\lambda_\alpha})\\ &\leqq\|x\|\|g_{\lambda_\alpha}\|+\lambda_\alpha(y, g_{\lambda_\alpha})\\ &=\|x\|+\lambda_\alpha(y, g_{\lambda_\alpha})\end{aligned}$$

なので，$(y, g_{\lambda_\alpha})\geqq 0$ である．よって，$(y, g)\geqq 0$ である．また，$\|x\|\leqq(x+\lambda_\alpha y, g_{\lambda_\alpha})$ より，$\|x\|\leqq(x, g)$ である．よって

$$\|x\|\leqq(x, g)\leqq\|x\|\|g\|\leqq\|x\|$$

となり，$\|x\|=(x, g)$，$\|g\|=1$ となる．これより $\|x\|g\in J(x)$ である．この $f=\|x\|g\in J(x)$ に対して，

$$(y, f)=\|x\|(y, g)\geqq 0$$

であるから，（2）がいえたことになる．

（2）$\Longrightarrow$（1）：$f\in J(x)$ が存在して，$(y, f)\geqq 0$ とする．このとき，すべての $\lambda\geqq 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\|x\|^2=(x, f)&\leqq(x, f)+\lambda(y, f)=(x+\lambda y, f)\\ &\leqq\|x+\lambda y\|\|f\|=\|x+\lambda y\|\|x\|.\end{aligned}$$

よって，$\|x\|\leqq\|x+\lambda y\|$ である．▨

この補助定理を用いて，増大作用素の特徴づけを行うことができる．

定理 3.6.2 つぎの条件（1）と（2）は同値である．

（1） $A\subset E\times E$ は増大作用素である；

（2） すべての $\lambda\geqq 0$ と $(x_i, y_i)\in A$ $(i=1,2)$ に対して，つねに

$$\|x_1-x_2+\lambda(y_1-y_2)\|\geqq\|x_1-x_2\|$$

が成り立つ．

証明 （1）$\Longrightarrow$（2）：$(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in A$ とすると，A が増大作用素であることから，$(y_1-y_2, j)\geqq 0$ となる $j\in J(x_1-x_2)$ が存在する．ここで，補助定理 3.6.1 を用いると，すべての $\lambda\geqq 0$ に対して

$$\|x_1-x_2\| \leqq \|x_1-x_2+\lambda(y_1-y_2)\|$$

が成り立つ．

（2）⟹（1）：$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ とする．このとき，（2）より

$$\|x_1-x_2+\lambda(y_1-y_2)\| \geqq \|x_1-x_2\| \qquad (\forall \lambda \geqq 0)$$

であるから，補助定理 3.6.1 を用いて

$$(y_1-y_2, j) \geqq 0$$

となるような $j \in J(x_1-x_2)$ が存在する．よって，A は増大作用素である．▨

$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して，

$$J_\lambda x = \{z \in E\colon z+\lambda Az \ni x\} \tag{*}$$

を考えよう．

$$z_1+\lambda w_1 = x, \quad z_2+\lambda w_2 = x, \quad w_1 \in Az_1, \ w_2 \in Az_2$$

とすると，A は増大作用素であるから

$$0 = \|z_1+\lambda w_1-(z_2+\lambda w_2)\| = \|z_1-z_2+\lambda(w_1-w_2)\| \geqq \|z_1-z_2\|$$

である．よって，$z_1 = z_2$ であり，$J_\lambda x$ は一価となる．

また，J_λ の定義域と値域は

$$D(J_\lambda) = R(I+\lambda A), \qquad R(J_\lambda) = D(A)$$

である．このような J_λ $(\lambda > 0)$ は A の **resolvent** とよばれ，(*) からもわかるように，

$$J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1} \qquad (\lambda > 0)$$

である．この J_λ $(\lambda > 0)$ から，A の**吉田近似**といわれる

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda) \qquad (\lambda > 0)$$

も定義できるが，J_λ，A_λ についてはつぎの性質が成り立つ．

定理 3.6.3（J_λ，A_λ の基本的性質）　$A \subset E \times E$ を増大作用素とし，$\lambda > 0$ とする．このとき，つぎの（i），(ii)，(iii)，(iv) が成り立つ．

（i）　$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leqq \|x-y\|$ $(\forall x, y \in R(I+\lambda A))$;

（ii）　A_λ は一価の増大作用素であり，かつ

$$\|A_\lambda x - A_\lambda y\| \leqq \frac{2}{\lambda}\|x-y\| \quad (\forall x, y \in R(I+\lambda A));$$

（iii）　$(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ $(\forall x \in R(I+\lambda A))$;

（iv）　$\|A_\lambda x\| \leqq |Ax|$ $(\forall x \in D(A) \cap R(I+\lambda A))$.

ただし，$|Ax| = \inf\{\|z\|\colon z \in Ax\}$ である．

証明　（i）　$z+\lambda u = x$，$w+\lambda v = y$，$u \in Az$，$v \in Aw$ とすると，定理 3.6.2 より

$$\|x-y\|=\|z+\lambda u-(w+\lambda v)\|\geqq\|z-w\|=\|J_\lambda x-J_\lambda y\|$$

なので，J_λ は nonexpansive 写像である．

（ii）$f\in J(x-y)$ とすると，

$$(A_\lambda x-A_\lambda y, f)=\frac{1}{\lambda}(x-y-(J_\lambda x-J_\lambda y), f)$$
$$\geqq\frac{1}{\lambda}\|x-y\|^2-\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda x-J_\lambda y\|\|f\|$$
$$\geqq\frac{1}{\lambda}\|x-y\|^2-\frac{1}{\lambda}\|x-y\|\|x-y\|=0$$

なので，A_λ は増大作用素である．また，

$$\|A_\lambda x-A_\lambda y\|=\frac{1}{\lambda}\|x-y-(J_\lambda x-J_\lambda y)\|$$
$$\leqq\frac{1}{\lambda}\|x-y\|+\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda x-J_\lambda y\|$$
$$\leqq\frac{2}{\lambda}\|x-y\|.$$

（iii）$J_\lambda x+\lambda AJ_\lambda x\ni x$ なので，$A_\lambda x=\frac{1}{\lambda}(x-J_\lambda x)\in AJ_\lambda x$ である．これは $(J_\lambda x, A_\lambda x)\in A$ を意味する．

（iv）$x\in D(A)\cap R(I+\lambda A)$ とし，$y\in Ax$ とすると $x+\lambda y\in(I+\lambda A)x$ である．よって，$J_\lambda(x+\lambda y)=x$ である．これから

$$\|A_\lambda x\|=\frac{1}{\lambda}\|x-J_\lambda x\|=\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda(x+\lambda y)-J_\lambda x\|$$
$$\leqq\frac{1}{\lambda}\|x+\lambda y-x\|=\|y\|$$

となるから，$\|A_\lambda x\|\leqq|Ax|$ である．▨

nonexpansive 写像と増大作用素の間にはつぎのような関係がある．

定理 3.6.4　E を Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．T を C から C への nonexpansive 写像とするとき，つぎの（i），（ii）が成立する．

（i）$A=I-T$ とすれば，A は一価の増大作用素になる；

（ii）$C=D(A)\subset\bigcap_{r>0}R(I+rA)$ である．

証明　（i）$D(A)=D(T)=C$ である．任意の $x_1, x_2\in D(A)$ と $f\in J(x_1-x_2)$ に対して

$$(Ax_1-Ax_2, f)=(x_1-Tx_1-x_2+Tx_2, f)$$
$$=(x_1-x_2, f)-(Tx_1-Tx_2, f)$$
$$\geqq\|x_1-x_2\|^2-\|Tx_1-Tx_2\|\|x_1-x_2\|$$
$$\geqq\|x_1-x_2\|^2-\|x_1-x_2\|^2=0$$

となるから，A は増大作用素である．

（ii）　任意の $x_1\in D(A)=C$ と $r>0$ に対して

$$x_0+rAx_0=x_1$$

となる x_0 が存在することを示せばよい．これは，$x_0+rx_0=x_1+rTx_0$ であるから

$$x_0=\frac{1}{r+1}x_1+\frac{r}{r+1}Tx_0$$

となる x_0 が存在することと同じである．よって

$$T_r(x)=\frac{1}{r+1}x_1+\frac{r}{r+1}Tx \qquad (\forall x\in C)$$

で定義される写像 T_r の不動点の存在をいえばよい．T_r は C から C への縮小写像であるから，$T_rx_0=x_0$ となる x_0 が一意に存在する．これは証明を完了する．▨

$A\subset E\times E$ が増大作用素であり，かつ

$$R(I+\lambda A)=E \qquad (\forall\lambda>0)$$

が成立しているとき，A は **m-増大作用素**(m-accretive operator)であるといわれる．

定理 3.6.5 (m-増大作用素の同値条件)　$A\subset E\times E$ が m-増大作用素であるための必要十分条件は，A が増大作用素で，かつ

ある $r>0$ に対して $R(I+rA)=E$

が成立することである．

証明　必要性は明らかなので十分性を示す．$J_r=(I+rA)^{-1}$ は E 全体で定義された nonexpansive 写像，すなわち

$$\|J_rx-J_ry\|\leqq\|x-y\| \qquad (\forall x,y\in E)$$

である．

$$I+\lambda A=\frac{\lambda}{r}\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)(I+rA) \qquad (\forall\lambda>0) \qquad (*)$$

であることに注意(問題 3.6.2)して，$x\in E$ に対して E から E への作用素 T を

$$Ty=x+\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_ry \qquad (\forall y\in E)$$

で定義する．すると，$y,z\in E$ に対して

$$\|Ty-Tz\|\leqq\left|1-\frac{r}{\lambda}\right|\|y-z\|$$

であるから，$\left|1-\frac{r}{\lambda}\right|<1$，特に $\frac{r}{2}<\lambda$ のとき，T は縮小写像となり，T

は E の中に不動点 z をもつ．これは

$$z=x+\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r z$$

のことであり，これを変形すると $x=\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)z$ となる．だから

$$x\in\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)(I+rA)(D(A)).$$

よって $E=\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)(I+rA)(D(A))$ となる．(*) を使うと，

$$\lambda>\frac{r}{2}\text{ のとき } R(I+\lambda A)=E.$$

同様の議論を繰り返すと，

$$\lambda>\frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)=\frac{r}{2^2}\text{ のとき } R(I+\lambda A)=E.$$

これを続けて定理を証明することができる．▨

この節の最後に，m-増大作用素の例を挙げておこう．

H を Hilbert 空間とし，f を H 上で定義され，$(-\infty,\infty]$ に値をとる proper で凸な関数とする．この proper で凸な関数 f に対して

$$\partial f(x)=\{x^*\in H\colon f(y)\geqq f(x)+(x^*,y-x)\quad({}^\forall y\in H)\}$$

で定義される H から H への多価写像 ∂f を，f の**劣微分**(subdifferential)とよぶ．この f に下半連続を仮定したときが特に重要である．

定理 3.6.6 (∂f は m-増大作用素)　H を Hilbert 空間とし，f を H から $(-\infty,\infty]$ への proper で下半連続な凸関数とする．このとき，∂f は m-増大作用素である．

証明　$x_i^*\in\partial f(x_i)$ $(i=1,2)$ とすると，$J(x_1-x_2)=x_1-x_2$ であるから，

$$\begin{aligned}(x_1^*-x_2^*,x_1-x_2)&=(x_1^*,x_1-x_2)-(x_2^*,x_1-x_2)\\&\geqq-(f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2))=0\end{aligned}$$

となり，∂f は増大作用素であることがわかる．∂f が m-増大作用素となることをいうには定理 3.6.5 より $R(I+\partial f)=H$ であることをいえばよい．すなわち，$x_0^*\in H$ に対して，方程式

$$x_0+\partial f(x_0)\ni x_0^*$$

を満たすような $x_0\in D(\partial f)$ の存在をいえばよい．いま

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2+f(x)-(x_0^*,x)\qquad({}^\forall x\in H)$$

とすると，f_1 は H 上の proper で下半連続な凸関数になる．さらに $\|x_n\|\to\infty$

のとき，$f_1(x_n)\to\infty$ であるから(問題 3.6.4)，定理 1.3.10 が使えて

$$f_1(x_0)=\min\{f_1(x):\ x\in H\}$$

となるような $x_0\in D(f_1)$ の存在がわかる．これから，任意の $x\in H$ に対して

$$\frac{1}{2}\|x\|^2+f(x)-(x_0{}^*,x)-\frac{1}{2}\|x_0\|^2-f(x_0)+(x_0{}^*,x_0)\geqq 0$$

を得る．よって，

$$\begin{aligned}f(x_0)-f(x)&\leqq(x_0{}^*,x_0-x)+\frac{1}{2}(\|x\|^2-\|x_0\|^2)\\&\leqq(x_0{}^*,x_0-x)+(x,x-x_0).\end{aligned}$$

$x=tx_0+(1-t)u$ $(t\in[0,1),\ u\in H)$ とおき，f の凸性を使うと，

$$f(x_0)-f(u)\leqq(x_0{}^*,x_0-u)+(tx_0+(1-t)u,u-x_0)$$

を得る．ここで $t\to 1$ とすると

$$f(x_0)-f(u)\leqq(x_0{}^*,x_0-u)+(x_0,u-x_0).$$

それゆえ

$$f(u)-f(x_0)\geqq(x_0{}^*-x_0,u-x_0)\qquad(\forall u\in H)$$

を得る．すなわち，$x_0{}^*-x_0\in\partial f(x_0)$ となり定理が証明された．▨

問　題 3.6

1.　$A\subset E\times E$ を増大作用素とする．このとき，

$$x\in\bigcap_{\lambda>0}R(I+\lambda A)\cap D(A)\Longrightarrow J_\lambda x\to x\qquad(\lambda\to 0)$$

である．これを示せ．

2.　$A\subset E\times E$ を増大作用素とする．このとき，$\lambda,r>0$ に対して，

$$I+\lambda A=\frac{\lambda}{r}\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)(I+rA)$$

が成り立つ．これを示せ．

3.　f を Banach 空間 E から $(-\infty,\infty]$ への proper で下半連続な凸関数とする．このとき，

$$f(x)\geqq(x,z^*)+\mu\qquad(\forall x\in E)$$

となるような $z^*\in E^*$ と $\mu\in\boldsymbol{R}$ が存在する．

4.　f を Hilbert 空間 H から $(-\infty,\infty]$ への proper で下半連続な 凸関数とし，$x_0{}^*\in H$ とする．このとき，

$$g(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2+f(x)-(x,x_0{}^*)\qquad(\forall x\in H)$$

で定義される H 上の関数 g は proper で下半連続な凸関数である．また，$\|z_n\|\to\infty$ のとき，$g(z_n)\to\infty$でもある．

4

Banach 空間における収束定理

この章では，Banach 空間における増大作用素の resolvent の収束定理と nonexpansive 写像の非線形エルゴード定理を証明する．また非線形関数解析学の手法を用いることによって，線形写像の族に対するエルゴード定理も証明する．

4.1 Resolvent の収束

この節では，増大作用素の resolvent の収束性について論じる．

E を Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda>0$ に対して

$$\overline{D(A)}\subset R(I+\lambda A)$$

が成立するならば，A は**値域条件**(range condition)を満たすといわれる．

このとき，A の 0 の逆像 $A^{-1}0=\{x\in D(A):\ 0\in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点の集合 $F(J_r)=\{x\in D(A):\ J_rx=x\}$ の間にはつぎの関係がある．

補助定理 4.1.1 E を Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．このとき，すべての $r>0$ に対して

$$F(J_r)=A^{-1}0$$

である．

証明 $r>0$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} x\in F(J_r) &\Leftrightarrow J_rx=x \Leftrightarrow x+rAx\ni x\\ &\Leftrightarrow 0\in rAx \Leftrightarrow 0\in Ax\\ &\Leftrightarrow x\in A^{-1}0 \end{aligned}$$

である．よって補助定理は証明された．▨

これを用いてつぎの補助定理を証明することができる．

補助定理 4.1.2　E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．このとき，$x \in \bigcap_{r>0} R(I+rA)$ に対して，つぎの (i), (ii) が成立する．

(i)　$t_n \to \infty$，$y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$ となる $\{t_n\}$ が存在すれば，$y \in A^{-1}0$ である．

(ii)　E が (s) であり，$t_n \to \infty$，$s_n \to \infty$，$y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$，$z = \lim_{n\to\infty} J_{s_n}x$ となる $\{t_n\}$，$\{s_n\}$ が存在すれば，$y = z$ となる．

証明　(i)　$r>0$ とする．$y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$ より，$\{J_{t_n}x\}$ は有界である．よって，定理 3.6.3 の (iii)，(iv) より，$n \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}\|J_r J_{t_n}x - J_{t_n}x\| &= \|(J_r - I)J_{t_n}x\| = r\|A_r J_{t_n}x\| \leqq r|AJ_{t_n}x| \\ &\leqq r\|A_{t_n}x\| = r\left\|\frac{x - J_{t_n}x}{t_n}\right\| \leqq r\frac{\|x\| + \|J_{t_n}x\|}{t_n} \to 0.\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\|J_r y - y\| &\leqq \|J_r y - J_r J_{t_n}x\| + \|J_r J_{t_n}x - J_{t_n}x\| + \|J_{t_n}x - y\| \\ &\leqq 2\|J_{t_n}x - y\| + \|J_r J_{t_n}x - J_{t_n}x\| \to 0\end{aligned}$$

となり，$J_r y = y$ を得る．よって $y \in F(J_r) = A^{-1}0$ である．

(ii)　(i) より，$z \in A^{-1}0$ であるので，$0 \in Az$ である．また，定理 3.6.3 の (iii) より

$$\frac{1}{t_n}(I - J_{t_n})x = A_{t_n}x \in AJ_{t_n}x$$

でもある．A は増大作用素であり，定理 3.2.4 より双対写像 J は一価なので

$$\left(\frac{1}{t_n}(I - J_{t_n})x - 0, J(J_{t_n}x - z)\right) \geqq 0.$$

よって

$$(J_{t_n}x - x, J(J_{t_n}x - z)) \leqq 0.$$

補助定理 3.2.5 より，$\|u_n - u\| \to 0$ ならば $J(u_n)$ は弱*の位相のもとで $J(u)$ に収束するので，$(y - x, J(y - z)) \leqq 0$ となる．同様に，

$$(z - x, J(z - y)) \leqq 0.$$

よって，$\|y - z\|^2 = (y - z, J(y - z)) \leqq 0$ となり，$y = z$ を得る．▨

C を Banach 空間 E の閉凸集合とする．このとき C が nonexpansive 写像に対して不動点性をもつとは，C から C の中へのどんな nonexpansive 写像も，C の中に不動点をもつことであった(p. 107 参照)．

いまや $r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束定理を証明することができる．

定理 4.1.3 ($r\to\infty$ のときの $J_r x$ の収束性) E を (uG) でかつ回帰的な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．また E のすべての弱コンパクトな凸集合は nonexpansive 写像に対して不動点性をもつとする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)}\subset C\subset\bigcap_{r>0}R(I+rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0\in R(A)$ ならば，任意の $x\in C$ に対して $\lim_{t\to\infty}J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

証明 $x\in C$ を固定し，$t_n\to\infty$ とする．$0\in R(A)$，すなわち，$A^{-1}0\neq\phi$ であるので，$\{J_{t_n}x\}$ は有界集合となる．実際，$z\in A^{-1}0$ とすると，定理 4.1.1 より

$$\begin{aligned}\|J_{t_n}x\|&\leqq\|J_{t_n}x-z\|+\|z\|\\&=\|J_{t_n}x-J_{t_n}z\|+\|z\|\\&\leqq\|x-z\|+\|z\|\end{aligned}$$

なので，$\{J_{t_n}x\}$ は有界集合である．μ を $N=\{1,2,\cdots\}$ 上の invariant mean，すなわち Banach limit とすると

$$g(z)=\mu_n\|J_{t_n}x-z\|^2\qquad(\forall z\in C)$$

によって C 上の実数値関数 g を定義できる．いま

$$\begin{aligned}r_0&=\inf\{\mu_n\|J_{t_n}x-z\|^2:\ z\in C\},\\K&=\{z\in C:\ \mu_n\|J_{t_n}x-z\|^2=r_0\}\end{aligned}$$

とすると，K は空でない有界閉凸集合である．実際，g は連続で凸関数なので K は閉凸集合である．空でないことは定理 1.3.10 による．$z\in K$ とすると，定理 1.5.1 より

$$\inf_n\|J_{t_n}x-z\|^2\leqq\mu_n\|J_{t_n}x-z\|^2<r_0+1$$

であり，$\|J_{t_n}x-z\|^2<r_0+1$ となる $J_{t_n}x$ が存在する．$\{J_{t_n}x\}$ は有界なので，K も有界となる．また $r>0$ とすると K は J_r のもとで不変でもある．実際，補助定理 4.1.2 の証明のようにして，

$$\|J_rJ_{t_n}x-J_{t_n}x\|\to0\qquad(n\to\infty)$$

であるので，任意の $u\in K$ について，

$$\begin{aligned}g(J_ru)&=\mu_n\|J_{t_n}x-J_ru\|^2\\&\leqq\mu_n(\|J_{t_n}x-J_rJ_{t_n}x\|+\|J_rJ_{t_n}x-J_ru\|)^2\\&=\mu_n\|J_rJ_{t_n}x-J_ru\|^2\\&\leqq\mu_n\|J_{t_n}x-u\|^2=r_0\end{aligned}$$

が成り立つ(問題 4.1.2)．また，仮定より $J_ru\in C$ であるので，$J_ru\in K$ となる．これは $J_rK\subset K$ を意味する．K は弱位相のもとでコンパクトな凸集合に

なるから仮定より J_r の不動点が K の中に存在する．これを v とすると，$v\in F(J_r)=A^{-1}0$ より $0\in Av$ となる．また，定理 3.6.3 の（iii）より

$$\frac{1}{t_n}(I-J_{t_n})x=A_{t_n}x\in AJ_{t_n}x$$

であり，A は増大作用素であるので

$$\left(\frac{1}{t_n}(I-J_{t_n})x-0,\ J(J_{t_n}x-v)\right)\geqq 0 \qquad (\forall n>0).$$

t_n を両辺に掛けて，Banach limit μ をとると

$$\mu_n(J_{t_n}x-x,\ J(J_{t_n}x-v))\leqq 0. \tag{$*$}$$

また $v\in K$ なので補助定理 3.5.4 を使えば

$$\mu_n(z-v,\ J(J_{t_n}x-v))\leqq 0 \qquad (\forall z\in C).$$

ここで $z=x$ とすると，

$$\mu_n(x-v,\ J(J_{t_n}x-v))\leqq 0$$

となり，これと（$*$）を用いると

$$\mu_n(J_{t_n}x-v,\ J(J_{t_n}x-v))\leqq 0$$

となり，$\mu_n\|J_{t_n}x-v\|^2=0$ を得る．よって，定理 1.5.4 より

$$0\leqq\varliminf_n\|J_{t_n}x-v\|^2\leqq\mu_n\|J_{t_n}x-v\|^2=0$$

となり，$\{J_{t_n}x\}$ の部分列 $\{J_{t_{n_j}}x\}$ で v に収束するものがとれる．また $\{J_{t_n}x\}$ の部分列で収束するものがあれば，補助定理 4.1.2 よりその収束先は v であるので $\{J_{t_n}x\}$ は v に収束することになる．$\{J_{t_n}x\}$ は $\{J_tx\}$ の任意の部分列であったので，$t\to\infty$ のとき，$J_tx\to v$ ということが結論づけられる．v は $J_rv=v$ であったので，$v\in A^{-1}0$ である． ▨

定理 4.1.3 の直接的な結果として，つぎの定理が証明できる．

定理 4.1.4　E を (us) でかつ (uc) な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を m-増大作用素とする．このとき，$0\in R(A)$ ならば，任意の $x\in E$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}J_tx$$

が存在し，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

証明　E は (uc) なので，定理 3.1.6 より E は回帰的である．また，A は m-増大作用素であることより，増大作用素であり，かつ

$$R(I+rA)=E \qquad (\forall r>0)$$

である．よって A は値域条件を満たす．E は (uc) なのですべての有界閉凸集合は nonexpansive 写像に対して不動点性をもつ(p. 106 参照)．$C=E$ とすると，定理 4.1.4 は定理 4.1.3 より得られる． ▨

定理 4.1.5　E を (uG) でかつ回帰的な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ は値域条件を満たす増大作用素とする．また，E のすべての弱コンパクトで凸な集合は nonexpansive 写像に対して不動点性をもつものとする．$A^{-1}0\neq\phi$ とし，$\overline{D(A)}$ が凸集合ならば，任意の $x\in\overline{D(A)}$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} J_t x$$

が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

証明　A が値域条件を満たす増大作用素であるので

$$\overline{D(A)}\subset R(I+rA)\qquad(\forall r>0)$$

である．仮定より $\overline{D(A)}$ は凸集合なので，$C=\overline{D(A)}$ とすると定理 4.1.5 は定理 4.1.3 より得られる．■

注　定理 4.1.5 は実は定理 2.2.1 (Browder の強収束定理) の拡張になっている (問題 4.1.3)．実際，定理 2.2.1 の u_n は

$$u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)Tu_n+\frac{1}{n}x_0$$

であるから，$nu_n=(n-1)Tu_n+x_0$ となり，

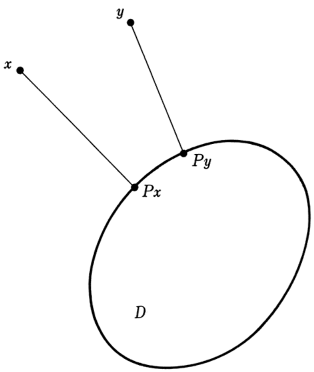
$$u_n+(n-1)(I-T)u_n=x_0$$

となる．よって，$J_{n-1}x_0=u_n$ である．ただし，$A=I-T$ である．だから，定理 3.6.4 を考慮し，定理 4.1.5 を使えば

$$\lim_{n\to\infty} J_n x_0=\lim_{n\to\infty} u_{n+1}\in(I-T)^{-1}0=F(T)$$

となる．

つぎに $r\to\infty$ のときの $J_r x$ の収束先について，少々考察を加える．



E を Banach 空間とし，C, D を E の部分集合とする．P: $C\to D$ が **sunny** であるとは，$x\in C$ に対して，$Px+t(x-Px)\in C$，$t\geqq 0$ ならば

$$P(Px+t(x-Px))=Px$$

がつねに成り立つことである．

補助定理 4.1.6　E を (s) なる Banach 空間とし，C を E の凸集合とする．また $C_0\subset C$ とし，P を C から C_0 の上への retraction とする．このとき，任意の $x\in C$ と $y\in C_0$ に対して，$(x-Px, J(Px-y))\geqq 0$ がつねに成り立つならば P は nonexpansive であり，かつ sunny である．

証明　$x, z \in C$ とする．仮定から

$$(x-Px, J(Px-Pz)) \geqq 0, \qquad (z-Pz, J(Pz-Px)) \geqq 0$$

である．したがって，$(x-z-(Px-Pz), J(Px-Pz)) \geqq 0$ である．よって

$$\|x-z\|\|Px-Pz\| \geqq (x-z, J(Px-Pz)) \geqq \|Px-Pz\|^2$$

となり，P は nonexpansive である．つぎに，$x_t = Px + t(x-Px)$ $(t>0)$ とおくと，十分小さな $t>0$ に対して $x_t \in C$ である．だから

$$(x-Px, J(Px-Px_t)) \geqq 0, \qquad (x_t-Px_t, J(Px_t-Px)) \geqq 0$$

となる．$x_t - Px = t(x-Px)$ から，

$$(x_t-Px, J(Px-Px_t)) \geqq 0$$

を得る．よって $(Px-Px_t, J(Px_t-Px)) \geqq 0$ となる．ゆえに $\|Px-Px_t\|^2 \leqq 0$ である．だから $Px = Px_t$ となり，P は sunny である．　▨

定理 4.1.3 の仮定のもとでは，任意の $x \in C$ に対し

$$\lim_{t\to\infty} J_t x$$

がつねに存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属するが，いま

$$Px = \lim_{t\to\infty} J_t x \qquad (\forall x \in C)$$

とすると，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．実際，$x \in C$, $z \in A^{-1}0$ に対して，

$$(x-J_t x-0, J(J_t x-z)) \geqq 0 \qquad (\forall t>0)$$

であるが，$Px = \lim_{t\to\infty} J_t x$ であるので，

$$(x-Px, J(Px-z)) \geqq 0$$

となる．よって補助定理 4.1.6 より，P は sunny nonexpansive retraction である．

注　補助定理 4.1.6 の逆も真である(問題 5.5.2 を参照)．

問　題 4.1

1.　H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．このとき，H から C の上への距離射影 P は sunny nonexpansive である．これを示せ．

2.　定理 4.1.3 の証明の中で，$\|J_r J_{t_n} x - J_{t_n} x\| \to 0$ なので

$$\mu_n \|J_{t_n} x - J_r u\|^2 \leqq \mu_n \|J_r J_{t_n} x - J_r u\|^2$$

といっているが，これを示せ．

3.　定理 4.1.5 の後の**注**を詳しく確かめよ．

4.2 Resolvent の収束（2）

前の節では，増大作用素 A の resolvent J_r の $r\to\infty$ のときの収束について論じたが，ここでは $r\to 0$ のときの J_r の収束について論じよう．

補助定理 4.2.1 Eを (us) な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$を値域条件を満たす増大作用素とする．また $x\in\bigcap_{r>0} R(I+rA)$ とする．このとき，$t_n\to 0$, $s_n\to 0$, $u=\lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$, $z=\lim_{n\to\infty} J_{s_n}x$ となる $\{t_n\}$, $\{s_n\}$ が存在すれば，$u=z$ である．

証明 $y\in\overline{D(A)}$ を固定する．このとき，$y_n\to y$ となる $y_n\in D(A)$ を選ぶと，

$$\begin{aligned}\|y-J_ty\|&\leqq\|y-y_n\|+\|y_n-J_ty_n\|+\|J_ty_n-J_ty\|\\&\leqq 2\|y-y_n\|+\|y_n-J_ty_n\|\end{aligned}$$

であり，しかも定理 3.6.3 の（iv）より

$$\begin{aligned}\|y_n-J_ty_n\|&=t\|A_ty_n\|\\&\leqq t|Ay_n|\\&=t\inf\{\|y\|:\ y\in Ay_n\}\end{aligned}$$

であるので，$t\to 0$ のとき，$J_ty\to y$ である．また，A は増大作用素であるので定理 3.6.3 の（iii）より

$$(x-J_tx-(y-J_ty), J(J_tx-J_ty))\geqq 0 \qquad (\forall t>0).$$

よって

$$(x-J_tx, J(J_tx-J_ty))\geqq(y-J_ty, J(J_tx-J_ty)) \qquad (\forall t>0).$$

いま $\{J_ty\}$ は有界であるから

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-J_{t_n}y))\geqq 0 \qquad (\forall y\in\overline{D(A)}).$$

ここで，μ は $N=\{1,2,\cdots\}$ 上の Banach limit である．Eは (us) であるから

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-y))\geqq 0 \qquad (\forall y\in\overline{D(A)})$$

となる(問題 4.2.1)．$z=\lim J_{s_n}x\in\overline{D(A)}$ を上式に入れると

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-z))\geqq 0.$$

よって補助定理 3.2.5 より

$$\begin{aligned}(x-u, J(u-z))&=\lim_{n\to\infty}(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-z))\\&=\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-z))\geqq 0.\end{aligned}$$

同様にして，$(x-z, J(z-u))\geqq 0$ となる(問題 4.2.2)．だから

$$-\|z-u\|^2=(z-u, J(u-z))\geqq 0$$

となり，$z=u$ を得る． ▨

定理 4.2.2 ($r\to 0$ のときの $J_r x$ の収束性)　E を (us) な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を

$$\overline{D(A)}\subset C\subset\bigcap_{r>0}R(I+rA)$$

となる E の閉凸集合とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，$\lim_{t\to 0}J_t x$ が存在するための必要十分条件は，C から $\overline{D(A)}$ 上への nonexpansive retraction P が存在することである．

証明　$Px=\lim_{t\to 0}J_t x$ $(x\in C)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}(Px-Py, J(Px-Py))&=\lim_{t\to 0}(J_t x-J_t y, J(Px-Py))\\ &\leqq\|x-y\|\|Px-Py\|\end{aligned}$$

となるから，P は nonexpansive である．P が C から $\overline{D(A)}$ 上への retraction であることは補助定理 4.2.1 の証明の前半から明らかである．

逆に C から $\overline{D(A)}$ 上への nonexpansive retraction P が存在したとしよう．$x\in C$ とし，$t_n\to 0$ としよう．このとき，Banach limit μ に対して，C 上の関数 g が

$$g(z)=\mu_n\|J_{t_n}x-z\|^2\qquad(\forall z\in C)$$

で定義できる．$\{J_{t_n}x\}$ が有界であることは，$v\in D(A)$ とすると

$$\begin{aligned}\|J_{t_n}x-v\|&=\|J_{t_n}x-J_{t_n}v+J_{t_n}v-v\|\\ &\leqq\|J_{t_n}x-J_{t_n}v\|+\|J_{t_n}v-v\|\\ &\leqq\|x-v\|+\|J_{t_n}v-v\|\end{aligned}$$

であり，かつ $\|J_{t_n}v-v\|\to 0$ であることよりわかる．

$$K=\{u\in C\colon\ g(u)=\min_{y\in C}g(y)\}$$

とすると，K は空でない有界な閉凸集合となる．さらに $K\cap\overline{D(A)}\neq\phi$ である．なぜならば，$u\in K$ としたとき，$PJ_{t_n}x=J_{t_n}x$ なので

$$\begin{aligned}g(Pu)&=\mu_n\|J_{t_n}x-Pu\|^2\\ &=\mu_n\|PJ_{t_n}x-Pu\|^2\\ &\leqq\mu_n\|J_{t_n}x-u\|^2=g(u)\end{aligned}$$

となり，$Pu\in K$ であることがわかる．また，$Pu\in\overline{D(A)}$ であるから

$$K\cap\overline{D(A)}\neq\phi$$

である．$v\in K\cap\overline{D(A)}$ とすると，補助定理 3.5.4 より

$$\mu_n(z-v, J(J_{t_n}x-v))\leqq 0\qquad(\forall z\in C)$$

であり，特に $z=x$ とすれば

$$\mu_n(x-v, J(J_{t_n}x-v)) \leqq 0. \qquad (*)$$

補助定理 4.2.1 の証明の中のようにして

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-y)) \geqq 0 \qquad ({}^\forall y \in \overline{D(A)})$$

でもあるから，$y=v$ とすれば

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-v)) \geqq 0$$

となる．これと (*) より

$$\mu_n(v-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-v)) \geqq 0$$

となり，$\mu_n\|v-J_{t_n}x\|^2=0$ を得る．よって定理 1.5.4 より

$$0 \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|J_{t_n}x-v\|^2 \leqq \mu_n\|J_{t_n}x-v\|^2=0$$

となり，$\{J_{t_n}x\}$ の部分列 $\{J_{t_{n_j}}x\}$ で v に収束するものがとれる．補助定理 4.2.1 により，この v は一意に定まるので，$t\to 0$ のとき $J_t x\to v$ ということがいえる．よって定理の証明は完了する．▨

$\lim_{t\to 0} J_t x$ が存在するためには，$\overline{D(A)}$ 上への nonexpansive retraction P の存在が必要となる．このような P はどんな仮定のもとに存在するのだろうか．それに答えるのがつぎの 2 つの定理である．

定理 4.2.3 E は回帰的で (sc) な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C は E の閉凸集合とし，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする．このとき，C から $\overline{\mathrm{co}}\, D(A)$ の上への nonexpansive retraction が存在する．

証明

$$Q=\{x\in C;\ r\to 0 \text{ のとき } J_r x \rightharpoonup x\}$$

とおくと，$\overline{D(A)}\subseteq Q$ より Q は空でない．実は $Q=\overline{\mathrm{co}}\, D(A)$ がいえる．これをいうには Q が閉で凸となることをいえばよい．実際 Q が閉凸集合がいえたとすると，

$$\overline{D(A)} \subset Q \subset \overline{D(A)}^w$$

であることを使って

$$\overline{\mathrm{co}}\, D(A) \subset Q \subset \overline{D(A)}^w \subset \overline{\mathrm{co}}\, D(A)$$

となり，$Q=\overline{\mathrm{co}}\, D(A)$ がいえる．ただし，$\bar{B}^w$ は B の弱閉包を表す．さて Q が閉凸集合となることを示そう．まず $\{x_n\}\subset Q$, $x_n\to x$ とすると，$w^*\in E^*$ に対して

$$\begin{aligned}&|(J_r x-x, w^*)|\\ &\leqq |(J_r x-J_r x_n, w^*)|+|(J_r x_n-x_n, w^*)|+|(x_n-x, w^*)|\end{aligned}$$

$$\leqq 2\|x_n - x\|\|w^*\| + |(J_r x_n - x_n, w^*)|$$

となる．この不等式を使えば $(J_r x - x, w^*) \to 0$ がいえ，$x \in Q$ である．これで Q が閉であることがいえた．つぎに，$x, y \in Q$，$0 \leqq t \leqq 1$ とし，$z = tx + (1-t)y$ とおく．すると，$\{J_r z\}$ の $r \to 0$ としたときの w に弱収束する部分点列 $\{J_{r_n} z\}$ に対して，

$$\|w - x\| \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|J_{r_n} z - J_{r_n} x\| \leqq \|z - x\| = (1-t)\|x - y\|$$

である．同様に

$$\|w - y\| \leqq \|z - y\| = t\|x - y\|.$$

よって E が (sc) であることから $w = z$ である．だから $r \to 0$ のとき，$J_r z \rightharpoonup z$ である．したがって Q は凸集合である．さて $x \in C$ に対して，$\{J_r x\colon 0 < r \leqq 1\}$ は有界であるから(p. 130 を参照)，

$$\|J_r x\| \leqq M(x) \qquad ({}^\forall r \ (0 < r \leqq 1))$$

となる $M(x)$ をとり

$$Qx = \{y \in Q\colon \|y\| \leqq M(x)\}$$

とおくと，Qx は弱コンパクトである．また，$0 < r \leqq 1$ に対して

$$J_r \in \prod_{x \in C} Qx$$

と考えることができる．P を $\{J_r\colon 0 < r \leqq 1\}$ の $\prod_{x \in C} Qx$ での収積点とすると，この P が求める nonexpansive retraction である．実際，P に収束する $\{J_r\}$ の部分ネットを $\{J_{r_\alpha}\}$ とすると，任意の $x, y \in C$ に対して

$$J_{r_\alpha} x \rightharpoonup Px, \qquad J_{r_\alpha} y \rightharpoonup Py$$

である．J_{r_α} が nonexpansive なので P も nonexpansive になる．また，任意の $x \in C$ に対して，$Px \in Qx \subset Q$ なので $J_{r_\alpha} Px \rightharpoonup Px$ である．一方

$$J_{r_\alpha} Px \rightharpoonup PPx$$

であるので $Px = P^2 x$ となり，P は retraction である．　▨

定理 4.2.4　E を E^* が (F) となる Banach 空間とする．$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．このとき，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r > 0} R(I + rA)$$

となる閉凸集合 C が存在するならば $\overline{D(A)}$ は凸集合である．

証明　定理 4.2.3 の証明から，

$$\overline{\mathrm{co}}\, D(A) = \{x \in C\colon \ r \to 0 \text{ のとき } J_r x \rightharpoonup x\}$$

である．また，補助定理 4.2.1 の証明の前半より

$$\overline{D(A)} = \{x \in C\colon \ r \to 0 \text{ のとき } J_r x \to x\}$$

である．さて $\overline{D(A)}$ が凸であることをいうには，$x,y\in\overline{D(A)}$ ならば $\frac{x+y}{2}\in\overline{D(A)}$ を示せば十分である．$\overline{\mathrm{co}}\,D(A)=\{x\in C\colon\ r\to 0$ のとき $J_rx\rightharpoonup x\}$ から

$$J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)\rightharpoonup\frac{x+y}{2}.$$

したがって，

$$J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)-J_rx\rightharpoonup\frac{y-x}{2}.$$

よって，ノルムの弱下半連続性より

$$\left\|\frac{y-x}{2}\right\|\leqq\varliminf_{r\to 0}\left\|J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)-J_rx\right\|\leqq\varlimsup_{r\to 0}\left\|J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)-J_rx\right\|$$
$$\leqq\left\|\frac{x+y}{2}-x\right\|=\left\|\frac{y-x}{2}\right\|.$$

ゆえに

$$\left\|J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)-J_rx\right\|\xrightarrow[r\to 0]{}\left\|\frac{y-x}{2}\right\|.$$

E^* が (F) であるので，問題 3.3.3 を使えば

$$J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)-J_rx\to\frac{y-x}{2}.$$

これと $J_rx\to x$ から $J_r\left(\frac{x+y}{2}\right)\to\frac{x+y}{2}$ となる．よって $\frac{x+y}{2}\in\overline{D(A)}$． ▨

この 2 つの定理と定理 4.2.2 を用いると，Reich によって証明されたつぎの強収束定理が得られる．

定理 4.2.5 (Reich の強収束定理)　E を (us) でかつ (uc) な Banach 空間とし，$A\subset E\times E$ を m-増大作用素とする．このとき，$x\in E$ に対して

$$\lim_{r\to 0}J_rx$$

が存在する．

証明　A が m-増大作用素であるから値域条件を満たす．E は (uc) であるので回帰的である．また E は (uc) なので (sc) である．だから $C=E$ とすれば，定理 4.2.3 より E から $\overline{\mathrm{co}}\,D(A)$ の上への nonexpansive retraction が存在する．また E は (uc) なので定理 3.3.8 より E^* は (us)．したがって E^* は (F) である．定理 4.2.4 より $\overline{D(A)}$ は凸集合となり，$\overline{D(A)}=\overline{\mathrm{co}}\,D(A)$ となる．だから P は E から $\overline{D(A)}$ の上への nonexpansive retraction である．以上のことから，定理 4.2.2 より任意の $x\in E$ に対して，$\lim_{r\to 0}J_rx$ が存在する． ▨

問　題 4.2

1. 補助定理 4.2.1 の証明の中で，E が (us) ならば，等式

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-J_{t_n}y))=\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-y))$$

が成り立つ．これを示せ．

2. 補助定理 4.2.1 の証明において，

$$(x-z, J(z-u))\geqq 0$$

を示せ．

4.3 Banach 空間での非線形エルゴード定理

この節では，Hilbert 空間において Baillon によって証明された非線形エルゴード定理(定理 2.2.3)を Banach 空間の場合に証明する．証明はそれほど簡単ではないが，Banach 空間の凸性とノルムの微分可能性が証明の中でどのように用いられるかをみていただきたい．

補助定理 4.3.1 (漸近的線形性定理) Banach 空間 E を (uc) とし，C を E の閉凸集合とする．T を C から C への nonexpansive 写像とし，$0<\alpha\leqq\beta<1$, $x\in C$, $f\in F(T)$ とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある N が存在して，すべての $n\geqq N$ と $k>0$ と λ $(\alpha\leqq\lambda\leqq\beta)$ に対して，

$$\|T^k(\lambda T^n x+(1-\lambda)f)-(\lambda T^{n+k}x+(1-\lambda)f)\|<\varepsilon$$

が成り立つ．ただし，$F(T)$ は T の不動点の集合を表す．

証明 $r=\lim_{n\to\infty}\|T^n x-f\|$, $R=\|x-f\|$, $c=\min\{2\lambda(1-\lambda):\ \alpha\leqq\lambda\leqq\beta\}$ とする．いま与えられた $\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{r}{r+d}>1-c\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

となるように $d>0$ をとる．このとき，ある N が存在して，すべての $n\geqq N$ に対して，$\|T^n x-f\|<r+d$ となるようにできる．$n\geqq N$ と $k>0$ と λ $(\alpha\leqq\lambda\leqq\beta)$ に対して，$z=\lambda T^n x+(1-\lambda)f$ とし，

$$u=(1-\lambda)(T^k z-f),\qquad v=\lambda(T^{n+k}x-T^k z)$$

とする．すると，

$$\|u\|\leqq\lambda(1-\lambda)\|T^n x-f\|,\qquad \|v\|\leqq\lambda(1-\lambda)\|T^n x-f\|$$

となる．いま $\|u-v\|=\|T^k z-(\lambda T^{n+k}x+(1-\lambda)f)\|\geqq\varepsilon$ とすると，問題 3.1.3 より

$$\begin{aligned}\|\lambda u+(1-\lambda)v\|&=\lambda(1-\lambda)\|T^{n+k}x-f\|\\&\leqq\lambda(1-\lambda)\|T^n x-f\|\left(1-2\lambda(1-\lambda)\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right)\\&\leqq\lambda(1-\lambda)\|T^n x-f\|\left(1-c\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right)\end{aligned}$$

となり，$(r+d)\left(1-c\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right)<r\leqq(r+d)\left(1-c\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right)$ を得る．これは矛盾である．よって補助定理は証明された． ▨

補助定理 4.3.2 Banach 空間 E を (uc) とし，C を E の有界閉凸集合とする．また T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，任意の

$\varepsilon>0$ に対して，ある正数 $\xi(\varepsilon)$ が存在して，C の元 x_0, x_1 に対して

$$\|Tx_0-x_0\|\leqq\xi(\varepsilon),\qquad \|Tx_1-x_1\|\leqq\xi(\varepsilon)$$

ならば，すべての $x\in[x_0,x_1]$ に対して，$\|Tx-x\|\leqq\varepsilon$ となるようにできる．

証明　$x\in[x_0,x_1]$ は $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_0$ $(0\leqq\lambda\leqq1)$ とかける．まず $\|x_0-x_1\|<\frac{\varepsilon}{3}$ ならば $\|x-x_0\|<\frac{\varepsilon}{3}$ となることは明らかである．そこで，$\xi(\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{3}$ とすると，

$$\begin{aligned}\|Tx-x\|&\leqq\|Tx-Tx_0\|+\|Tx_0-x_0\|+\|x_0-x\|\\&\leqq2\|x-x_0\|+\|Tx_0-x_0\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

よって $\|x_1-x_0\|\geqq\frac{\varepsilon}{3}$ となる x_0, x_1 を考えればよい．d_0 を C の直径とすると，$0\leqq\lambda<\frac{\varepsilon}{3d_0}$ となる λ に対して

$$\|x-x_0\|=\lambda\|x_1-x_0\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

となるから上と同じ議論で，$\xi(\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{3}$ に対して，$\|Tx-x\|<\varepsilon$ となる．よって $\lambda\geqq\frac{\varepsilon}{3d_0}$ のみを考えればよい．ところで，$(1-\lambda)<\frac{\varepsilon}{3d_0}$ ならば

$$\|x-x_1\|=(1-\lambda)\|x_1-x_0\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

なのでやはり $\|Tx-x\|<\varepsilon$ となるから，λ を $\frac{\varepsilon}{3d_0}\leqq\lambda\leqq\left(1-\frac{\varepsilon}{3d_0}\right)$ で考えればよい．$y=Tx$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}&\|y-x_0\|\leqq\|Tx-Tx_0\|+\|Tx_0-x_0\|\leqq\lambda\|x_1-x_0\|+\xi(\varepsilon),\\&\|y-x_1\|\leqq\|Tx-Tx_1\|+\|Tx_1-x_1\|\leqq(1-\lambda)\|x_1-x_0\|+\xi(\varepsilon)\end{aligned}$$

である．

$$z_0=\frac{y-x_0}{\lambda\|x_1-x_0\|},\qquad z_1=\frac{x_1-y}{(1-\lambda)\|x_1-x_0\|}$$

とすると，このとき

$$\|z_0\|\leqq1+\frac{\xi(\varepsilon)9d_0}{\varepsilon^2},\qquad \|z_1\|\leqq1+\frac{\xi(\varepsilon)9d_0}{\varepsilon^2}.$$

一方，$\lambda\in\left[\frac{\varepsilon}{3d_0},1-\frac{\varepsilon}{3d_0}\right]$ に対して，

$$\|\lambda z_0+(1-\lambda)z_1\|=\frac{\|x_1-x_0\|}{\|x_1-x_0\|}=1.$$

よって E は (uc) なので，$\xi(\varepsilon)$ を十分小さくとるならば $\|z_1-z_0\|<\frac{\varepsilon}{d_0}$ となる．すなわち，

$$\|y-x\|=\|(1-\lambda)(y-x_0)-\lambda(x_1-y)\|=\lambda(1-\lambda)\|x_1-x_0\|\|z_1-z_0\|<\varepsilon.$$

$y=Tx$ なので，この $\xi(\varepsilon)$ に対して $\|Tx-x\|<\varepsilon$ となる． ▨

この補助定理を用いると，nonexpansive 写像に対するつぎの不動点定理が得られる．

補助定理 4.3.3 C を (uc) なる Banach 空間の有界閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．$\{u_j\}$ を u_0 に弱収束する C の点列とし，

$$\lim_{j\to\infty}\|u_j-Tu_j\|=0$$

とする．このとき，u_0 は T の不動点である．

証明 $\|(I-T)u_j\|=\varepsilon_j\to 0$ なので，任意の j に対して，$\varepsilon_j\leqq\xi(\varepsilon_{j-1})<\varepsilon_{j-1}$ と仮定してもよい．ただし，$\xi(\varepsilon)$ は補助定理 4.3.2 の結論に現われた $\varepsilon>0$ に対する定数である．すると，

$$u\in\overline{\mathrm{co}}\{u_j\colon j\geqq k\}$$

ならば $\|u-Tu\|\leqq\varepsilon_{k-1}$ となる．$\overline{\mathrm{co}}\{u_j\colon j\geqq k\}$ は弱位相の意味で閉集合なので，$\{u_j\}$ の弱位相の意味での極限 u_0 は $\overline{\mathrm{co}}\{u_j\colon j\geqq k\}$ $(k=1,2,\cdots)$ に含まれる．よって，$\|u_0-Tu_0\|\leqq\varepsilon_j$ $(j=1,2,\cdots)$．すなわち，$\|u_0-Tu_0\|=0$ である． ▨

C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，T を C から C への写像とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して，C 上の写像 S_n $(n=1,2,\cdots)$ を

$$S_nx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$$

で定義すると，つぎの補助定理が成り立つ．

補助定理 4.3.4 C を (uc) なる Banach 空間の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，任意の $x\in C$ と $n>0$ に対して，

$$\lim_{i\to\infty}\|T^kS_nT^ix-S_nT^kT^ix\|=0$$

である．また，この収束は $k=1,2,\cdots$ に関して一様収束でもある．

証明 数学的帰納法によって証明する．最初は $n=2$ の場合に証明する．$r=\lim_{n\to\infty}\|T^{n+1}x-T^nx\|$，$R=\|x-Tx\|$，$x_i=T^ix$ $(i=1,2,\cdots)$ とする．$r\neq 0$ ならば，$\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{r}{r+c}>1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

となるように $c>0$ を選ぶことができる．このとき，ある N が存在して，すべての $i\geqq N$ と $k=0,1,2,\cdots$ に対して，$\|T^kx_i-T^{k+1}x_i\|\leqq r+c$ である．$i\geqq N$，$k>0$，$z=\frac{1}{2}(x_i+Tx_i)$ とし，

$$u=\frac{1}{2}(T^kz-T^kx_i),\qquad v=\frac{1}{2}(T^{k+1}x_i-T^kz)$$

とするならば，このとき

$$\|u\|\leqq\frac{1}{2}\|z-x_i\|=\frac{1}{4}\|Tx_i-x_i\|\leqq\frac{1}{4}(r+c)$$

である．同様に，$\|v\|\leqq\frac{1}{4}(r+c)$ である．

$$\|u-v\|=\left\|T^kz-\frac{1}{2}(T^{k+1}x_i+T^kx_i)\right\|\geqq\varepsilon$$

としよう．このとき，問題 3.1.3 によって

$$\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|=\frac{1}{4}\|T^{k+1}x_i-T^kx_i\|\leqq\frac{1}{4}(r+c)\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right)$$

となる．これは $\frac{r}{r+c}>1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)$ に矛盾する．$r=0$ ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\|u\|<\frac{\varepsilon}{2}$，$\|v\|<\frac{\varepsilon}{2}$ となるように十分大きな $i>0$ を選ぶことができる．よって

$$\left\|T^kz-\frac{1}{2}(T^{k+1}x_i+T^kx_i)\right\|=\|u-v\|\leqq\|u\|+\|v\|<\varepsilon$$

となる．これは $n=2$ の場合を証明したことになる．いまや $k=1,2,\cdots$ において，一様に

$$\lim_{i\to\infty}\|T^kS_{n-1}x_i-S_{n-1}T^kx_i\|=0$$

としよう．このとき，まず $\lim_{i\to\infty}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|$ が存在することを証明する．

$r=\underline{\lim}_{i\to\infty}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|$ とし，与えられた $\varepsilon>0$ に対して

$$\|S_{n-1}Tx_{i_0}-x_{i_0}\|<r+\frac{\varepsilon}{2},\qquad \|S_{n-1}T^kx_{i_0+1}-T^kS_{n-1}x_{i_0+1}\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

となるように $i_0>0$ を選ぶ．このとき，$k=1,2,\cdots$ に対して，

$$\begin{aligned}\|S_{n-1}Tx_{i_0+k}-x_{i_0+k}\|&\leqq\|S_{n-1}T^kx_{i_0+1}-T^kS_{n-1}x_{i_0+1}\|\\&\quad+\|T^kS_{n-1}x_{i_0+1}-T^kx_{i_0}\|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+r+\frac{\varepsilon}{2}=r+\varepsilon\end{aligned}$$

である．よって

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\|S_{n-1}Tx_{i_0+k}-x_{i_0+k}\|\leqq r+\varepsilon$$

となる．$\varepsilon>0$ は任意なので，$\overline{\lim}_{i\to\infty}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|\leqq\underline{\lim}_{i\to\infty}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|$ を得る．すなわち，$\lim_{i\to\infty}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|$ が存在する．

$$r=\lim_{i\to\infty}\|S_{n-1}Tx_i-x_i\|$$

とする．$r \neq 0$ ならば，$\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{r-c}{r+2c} > 1 - \dfrac{2(n-1)}{n^2}\delta\left(\dfrac{\varepsilon}{3r}\right)$ となるような $c>0$ が存在する．このとき，ある N が存在して，すべての $i \geqq N$ に対して，

$$|\|S_{n-1}Tx_i - x_i\| - r| \leqq c, \qquad \|S_{n-1}T^k x_{i+1} - T^k S_{n-1} x_{i+1}\| \leqq \frac{c}{n}$$

である．$k>0$ と $i \geqq N$ に対して

$$u = \frac{n}{n-1}(T^k S_n x_i - T^k x_i), \qquad v = n(S_{n-1}T^k x_{i+1} - T^k S_n x_i)$$

とおくと，このとき，

$$\|u\| \leqq \|S_{n-1}Tx_i - x_i\| \leqq r + c,$$
$$\|v\| \leqq n\|S_{n-1}T^k x_{i+1} - T^k S_{n-1} x_{i+1}\| + \|S_{n-1}Tx_i - x_i\| \leqq r + 2c,$$
$$\|u - v\| = \frac{n^2}{n-1}\|T^k S_n x_i - S_n T^k x_i\|$$

である．よって $n=2$ の場合の証明のようにして，すべての $i \geqq N$ と $k=1, 2, \cdots$ に対して

$$\|T^k S_n x_i - S_n T^k x_i\| < \varepsilon$$

を得る．$r=0$ のときは，やはり $n=2$ の場合の証明と同じようにして，ある N' が存在して，すべての $i \geqq N'$ に対して，$\|u\| < \frac{\varepsilon}{2}$，$\|v\| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるようにできる．ゆえに $\|T^k S_n x_i - S_n T^k x_i\| < \varepsilon$ である．これは証明を完了する． ▨

定理 4.3.5 Banach 空間 E は (uc) であり，そのノルムは Fréchet 微分可能であるとする．C を E の閉凸集合とし，T を C から C への nonexpansive 写像とする．このとき，任意の $x \in C$ に対して，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\{T^k x : k \geqq m\} \cap F(T)$$

は高々 1 点からなる．

証明 $w(x) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}}\{T^k x : k \geqq m\}$ とし，$f, g \in w(x) \cap F(T)$，$f \neq g$ としよう．$h = \dfrac{f+g}{2}$ とし，$r = \lim_{n\to\infty}\|T^n x - g\|$ とする．$h \in w(x)$ であるので，$\|h-g\| \leqq r$ である．任意の n に対して，$p_n \in [T^n x, h]$ を

$$\|p_n - g\| = \min\{\|y-g\| : y \in [T^n x, h]\}$$

となるように選ぶ．このとき，問題 4.3.3 によって

$$(p_n - T^n x, J(g - p_n)) \geqq 0$$

である．$p_n \in [T^n x, h]$ なので，$(h - T^n x, J(g-p_n)) \geqq 0$ である．

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|p_n - g\| = \|h - g\|$$

と仮定しよう．E は (uc) であり，$\|p_n-g\|\leqq\left\|\dfrac{p_n+h}{2}-g\right\|\leqq\|h-g\|$ であるので，p_n は h に強収束する(問題 4.3.4)．双対写像 J: $E\to E^*$ は連続なので(E と E^* の位相はノルム位相である)，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある N が存在して，

$$n\geqq N \text{ ならば } (h-T^nx, J(g-h)-J(g-p_n))\geqq-\varepsilon$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}(h-T^nx, J(g-h))&=(h-T^nx, J(g-h)-J(g-p_n))\\&\quad+(h-T^nx, J(g-p_n))\\&\geqq-\varepsilon+0=-\varepsilon\end{aligned}$$

である．だから，$y\in w(x)$ ならば $(h-y, J(g-h))\geqq0$ である．$y=g$ とおくことによって，$\|h-g\|=0$ となる．これは $h\neq g$ に矛盾する．$\varliminf_{n\to\infty}\|p_n-g\|<\|h-g\|$ としよう．このとき，ある $c>0$ と $\{p_n\}$ の部分点列 $\{p_{n_i}\}$ が存在して，

$$\|p_{n_i}-g\|+c<\|h-g\|$$

となるようにできる．$p_{n_i}=\alpha_iT^{n_i}x+(1-\alpha_i)h$ $(i=1,2,\cdots)$ とおくと，すべての i に対して，$\alpha\leqq\alpha_i\leqq\beta$ となるような $0<\alpha,\beta<1$ が存在する．補助定理 4.3.1 によって，ある N が存在して，すべての $n\geqq N$ と $k>0$, λ $(\alpha\leqq\lambda\leqq\beta)$ に対して，

$$\|T^k(\lambda T^nx+(1-\lambda)h)-(\lambda T^{n+k}x+(1-\lambda)h)\|<c$$

となるようにできる．$p_{n_{i_0}}\in\{p_{n_i}\}$，$n_{i_0}\geqq N$ とすると，$k=1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{aligned}\|p_{n_{i_0}+k}-g\|&=\|\alpha_{i_0}T^{n_{i_0}+k}x+(1-\alpha_{i_0})h-g\|\\&\leqq\|T^kp_{n_{i_0}}-(\alpha_{i_0}T^{n_{i_0}+k}x+(1-\alpha_{i_0})h)\|+\|T^kp_{n_{i_0}}-g\|\\&<c+\|p_{n_{i_0}}-g\|<\|h-g\|\end{aligned}$$

となる．よって $n\geqq n_{i_0}$ ならば $p_n\neq h$ となる．$n\geqq n_{i_0}$ に対して

$$u_k=k(h-T^nx)+T^nx \qquad (k\geqq1)$$

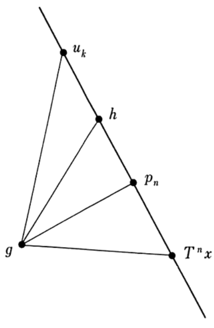
とすると $\|u_k-g\|\geqq\|h-g\|$ である．よって

$$\begin{aligned}&(h-u_k, J(g-h))\\&\quad=((1-k)(h-T^nx), J(g-h))\geqq0\end{aligned}$$

であるから，

$$(h-T^nx, J(g-h))\leqq0$$

もわかる．よって，すべての $y\in\overline{\mathrm{co}}\{T^kx\colon k\geqq n_{i_0}\}$ に対して，$(h-y, J(g-h))\leqq0$．$y=f=h+(h-g)$ とおくと，$\|h-g\|=0$ であることがわかる．これは $h\neq g$ に矛盾する．　▨



いまやBanach空間の非線形エルゴード定理が証明できる．

定理 4.3.6 EをFréchet微分可能なノルムをもつ一様凸なBanach空間とする．CをEの閉凸集合とし，TをCからCへのnonexpansive写像とする．このとき，$F(T)\neq\phi$ならば，任意の$x\in C$に対して

$$S_nT^ix=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kT^ix$$

は，$i=1,2,\cdots$ に関して$F(T)$ の点に一様に弱収束する．

証明 $\{T^nx\}$ は有界であり，

$$\|TS_nT^ix-S_nT^ix\|\leqq\|TS_nT^ix-S_nTT^ix\|+\|S_nTT^ix-S_nT^ix\|$$
$$\leqq\|TS_nT^ix-S_nTT^ix\|+\frac{1}{n}\|T^{n+i}x-T^ix\|$$

なので補助定理4.3.4より

$$\lim_{n\to\infty}\|TS_nT^{i_n}x-S_nT^{i_n}x\|=0$$

となるような点列 $\{S_nT^{i_n}x\}$ が存在する．補助定理4.3.3と定理4.3.5によって $\{S_nT^{i_n}x\}$ の弱収束する部分点列はすべて $\{y\}=w(x)\cap F(T)$ に弱収束する．また，補助定理4.3.4によって，すべてのiとkに対して

$$\lim_{n\to\infty}\|TS_nT^{i_n+kn+i}x-S_nT^{i_n+kn+i}x\|=0$$

である．よって，$k=1,2,\cdots$ に関して一様に$S_nT^{i_n+kn}x_i\rightharpoonup y$となる．一方，$n$と$m\geqq i_n$となる$m$に対して，$m=jn+i_n+r$，$r<n$とすると，

$$S_mT^ix=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}T^kx_i=\frac{1}{m}\left(\sum_{k=i_n+jn}^{m-1}T^kx_i+n\left(\sum_{k=0}^{j-1}S_nT^{i_n+kn}x_i\right)+\sum_{k=0}^{i_n-1}T^kx_i\right)$$

となる．$\{S_nT^{i_n+kn}x_i\}$ は$k=1,2,\cdots$ に関して一様にyに弱収束するので，$\{S_mT^ix\}$ は$i=1,2,\cdots$ に関して一様にyに弱収束する．▨

注 定理4.3.6は一様凸なBanach空間という条件だけで成り立つのではないかという問題はまだ解決されていない．

問 題 4.3

1. Eを一様凸なBanach空間とし，$A\subset E\times E$を増大作用素で，

$$\overline{\mathrm{co}}\,D(A)\subset R(I+A)$$

を満たすものとする．また，$(x_n,y_n)\in A$ $(n=1,2,\cdots)$ を，$\{x_n\}$ は有界であり，$y_n\to0$となるものとする．このとき，$0\in Av$となるvが存在する．

注 補助定理4.3.3において，$A=I-T$とおくと，$y_i=Au_i\to0$であるから，1より$0=(I-T)u_0$となる$u_0\in C$が存在する．だから，1は補助定理4.3.3の拡張にもなっている．

2. Eを一様凸なBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．またTをCからCへのnonexpansive写像で，$F(T)\neq\phi$とし，PをEから$F(T)$の上への距離射影とする．このとき，任意の$x\in C$に対して，PT^nxは$F(T)$の元に強収束する．これを示せ．

3. Eを(s)なるBanach空間とし，KをEの凸集合とする．$x\in E$と$x_0\in K$に対して，つぎの条件（1）と（2）は同値である．これを証明せよ．

（1） $\|x-x_0\|=\inf\{\|x-y\|:\ y\in K\}$ である；

（2） $(x_0-y, J(x-x_0))\geqq 0$ $(\forall y\in K)$ である．ただし，JはEの双対写像である．

4. 定理4.3.5の証明の中の，$p_n\to h$を示せ．

4.4 線形作用素に対するエルゴード定理

この節では，invariant mean の議論を用いることによって，線形作用素の族に対するエルゴード定理を証明する．

S を semitopological 半群とし，E を Banach 空間とする．

$$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$$

をつぎの条件を満たす E 上の線形連続作用素の族とする．

（1） $\|T_t\|\leqq C$ $(t\in S)$ となる実数 C が存在する；

（2） 任意の $x\in E$ に対し，$\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}$ は弱コンパクトである；

（3） $T_{st}=T_sT_t$ $(t,s\in S)$；

（4） 任意の $x\in E$ と $x^*\in E^*$ に対し，$g(s)=(T_sx,x^*)$ は s の関数として連続である．

このとき，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を E 上の線形連続作用素の **C-半群**とよぶことにしよう．

$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を E 上の線形連続作用素の C-半群とし，μ を $C(S)$ 上の mean とする．$x\in E$ を固定し，$x^*\in E^*$ に対して，関数

$$g(t)=(T_tx,\ x^*)\qquad(\forall t\in S)$$

を考えると，$g\in C(S)$ となる．この関数 g に対する μ の値を

$$\mu(g)=\mu_t(T_tx,x^*)$$

とすると，§2.4 と同様に，$\mu_t(T_tx,x^*)$ は x^* に関して線形となる．さらに，

$$\begin{aligned}|\mu_t(T_tx,x^*)|&\leqq\|\mu\|\sup_t|(T_tx,x^*)|\\&\leqq\sup_t\|T_tx\|\cdot\|x^*\|\\&\leqq C\|x\|\|x^*\|\end{aligned}$$

となるので，x^* に関して連続にもなる．よって，$\mu_t(T_tx,\ \cdot\ )$ は E^{**} の元である．そこで，$\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}$ の弱コンパクト性より

$$\mu_t(T_tx,x^*)=(T_\mu x,x^*)\qquad(\forall x^*\in E^*)$$

となる $\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}$ の元 $T_\mu x$ が一意に存在する．実際，n を E から E^{**} への自然な埋蔵とすると，$K=\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\in S\}$ に対して，$\mu_t(T_tx,\ \cdot\ )$ が $n(K)$ に含まれる．もしそうでないとすると，凸集合 $n(K)$ は弱*の意味でコンパクトなので，

$$\mu_t(T_tx,y^*)<\inf\{(y^*,z^{**})\colon z^{**}\in n(K)\}$$

となるような $y^*\in E^*$ が存在する．よって

$$\mu_t(T_tx,y^*)<\inf\{(y^*,z^{**}):\ z^{**}\in n(K)\}$$
$$\leqq\inf\{(T_tx,y^*):\ t\in S\}$$
$$\leqq\mu_t(T_tx,y^*)$$

となる．これは矛盾である．よって，$T_\mu x\in E$ である．このようにして，$C(S)$ 上の mean μ に対して，E 上の線形連続作用素 T_μ を

$$\mu_t(T_tx,x^*)=(T_\mu x,x^*)\qquad(x\in E,\ \ x^*\in E^*)$$

を満たすように定義できる．この T_μ が

$$\|T_\mu\|\leqq C,$$
$$T_\mu x\in\overline{\mathrm{co}}\{T_tx:\ t\in S\}\qquad(\forall x\in E)$$

を満たすことは明らかである(問題 4.4.1)．

補助定理 4.4.1　μ を $C(S)$ 上の left invariant mean とするとき，

$$T_\mu(E)\subset F(S)$$

である．ただし，$F(S)$ は T_t $(t\in S)$ の共通不動点の全体を表す．

証明　$x\in E$ とし，μ を $C(S)$ 上の left invariant mean とする．このとき，$s\in S$ と $x^*\in E^*$ に対して，$T_s{}^*$ を T_s の共役作用素とすると，

$$(T_sT_\mu x,x^*)=(T_\mu x,\ T_s{}^*x^*)$$
$$=\mu_t(T_tx,\ T_s{}^*x^*)=\mu_t(T_sT_tx,x^*)$$
$$=\mu_t(T_{st}x,x^*)=\mu_t(T_tx,x^*)$$
$$=(T_\mu x,x^*)$$

である．よって $T_sT_\mu x=T_\mu x$ である．これは $T_\mu(E)\subset F(S)$ を意味する．▨

補助定理 4.4.2　λ を $C(S)$ 上の invariant mean とし，μ を $C(S)$ 上の mean とする．このとき，

$$T_\lambda T_s=T_sT_\lambda=T_\lambda\qquad(\forall s\in S)$$

であり，かつ

$$T_\lambda T_\mu=T_\mu T_\lambda=T_\lambda$$

である．特に，T_λ は E から $F(S)$ の上への射影である．ただし，射影とは線形な retraction のことである．

証明　$s\in S$ とする．このとき，$x\in E$ と $x^*\in E^*$ に対して

$$(T_\lambda T_sx,x^*)=\lambda_t(T_tT_sx,x^*)=\lambda_t(T_{ts}x,x^*)$$
$$=\lambda_t(T_tx,x^*)=(T_\lambda x,x^*)$$

となる．これは $T_\lambda T_s=T_\lambda$ を意味する．$T_sT_\lambda=T_\lambda$ であることは補助定理 4.4.1 から明らかである．μ を $C(S)$ 上の mean としよう．このとき，$x\in E$ と $x^*\in E^*$ に対し，

$$(T_\mu T_\lambda x, x^*) = \mu_t(T_t T_\lambda x, x^*) = \mu_t(T_\lambda x, x^*)$$
$$= (T_\lambda x, x^*)$$

であり，かつ

$$(T_\lambda T_\mu x, x^*) = (T_\mu x, T_\lambda^* x^*) = \mu_t(T_t x, T_\lambda^* x^*)$$
$$= \mu_t(T_\lambda T_t x, x^*) = \mu_t(T_\lambda x, x^*)$$
$$= (T_\lambda x, x^*)$$

であるので，$T_\mu T_\lambda = T_\lambda T_\mu = T_\lambda$ がわかる．$\mu=\lambda$ とすると，$T_\lambda^2 = T_\lambda$ となり，T_λ が E から $F(\mathcal{S})$ の上への射影となることがわかる． ▨

つぎの補助定理は補助定理 4.4.2 の直接的な結果であるが，後で大変重要となるので挙げておく．

補助定理 4.4.3 μ と λ を $C(S)$ 上の invariant mean とする．このとき，

$$T_\mu = T_\lambda$$

である．

線形作用素に対して，定理 4.3.5 と同様な結果が成り立つ．

補助定理 4.4.4 $C(S)$ 上に invariant mean が存在するとする．このとき，任意の $x \in E$ に対して，集合

$$\overline{\mathrm{co}}\{T_t x:\ t \in S\} \cap F(\mathcal{S})$$

は 1 点からなる．

証明 $x \in E$ とし，μ を $C(S)$ 上の invariant mean とする．このとき，

$$T_\mu x \in F(\mathcal{S}), \qquad T_\mu x \in \overline{\mathrm{co}}\{T_t x, t \in S\}$$

であるから，$\overline{\mathrm{co}}\{T_t x:\ t \in S\} \cap F(\mathcal{S}) = \{T_\mu x\}$ であることを示す．実際，

$$x_0 \in \overline{\mathrm{co}}\{T_t x:\ t \in S\} \cap F(\mathcal{S})$$

とし，$\varepsilon > 0$ としよう．このとき，$x^* \in E^*$ に対して，

$$\varepsilon > C\|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T_{t_i} x - x_0 \right\|$$

となるような $\mathrm{co}\{T_t x:\ t \in S\}$ の元 $\sum_{i=1}^n \alpha_i T_{t_i} x$ が存在する．よって，

$$\varepsilon > C\|x^*\| \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T_{t_i} x - x_0 \right\|$$

$$\geqq \sup_{t \in S} \|T_t\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T_{t_i} x - x_0 \right\| \cdot \|x^*\|$$

$$\geqq \sup_{t \in S} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i T_t T_{t_i} x - x_0 \right\| \cdot \|x^*\|$$

$$\geqq \left| \mu_t\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_t T_{t_i} x - x_0,\ x^*\right) \right|$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_t (T_t T_{t_i} x - x_0, x^*) \right|$$
$$= |\mu_t (T_t x - x_0, x^*)|$$
$$= |(T_\mu x - x_0, x^*)|.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので，

$$(T_\mu x, x^*) = (x_0, x^*) \qquad (^\forall x^* \in E^*)$$

である．よって，$T_\mu x = x_0$ である． ▨

いまや Banach 空間上の線形連続作用素の C–半群に対するエルゴード定理が証明できる．

定理 4.4.5　E を Banach 空間とし，$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を E 上の線形連続作用素の C–半群とする．$C(S)$ 上の mean のネット $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ が漸近的に不変であるならば，すなわち，任意の $s \in S$ に対して

$$\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha, \qquad \mu_\alpha - l_s^* \mu_\alpha$$

が $C(S)^*$ の弱*位相のもとで 0 に収束するならば，つぎの条件を満たす E から $F(\mathcal{S})$ の上への射影 Q が存在する．

(1)　$\|Q\| \leqq C$;

(2)　任意の $x \in E$ に対し，$T_{\mu_\alpha} x$ は Qx に弱収束する;

(3)　$QT_t = T_t Q = Q$ $(^\forall t \in S)$;

(4)　$Qx \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$ $(^\forall x \in E)$.

さらに，この射影 Q はすべての漸近的に不変なネットに対して一意である．

証明　μ をネット $\{\mu_\alpha : \alpha \in I\}$ の $C(S)^*$ の弱*位相のもとでの収積点であるとしよう．このとき，μ は $C(S)$ 上の invariant mean である．この μ に対して，T_μ は E から $F(\mathcal{S})$ の上への射影で，

$$\|T_\mu\| \leqq C,$$
$$T_\mu T_t = T_t T_\mu = T_\mu \qquad (^\forall t \in G),$$
$$T_\mu x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\} \qquad (^\forall x \in E)$$

を満たす．だから $Q = T_\mu$ とおいて，あとは $T_{\mu_\alpha} x$ が Qx に弱収束することを示せばよい．すべての $\alpha \in I$ に対して，

$$T_{\mu_\alpha} x \in \overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$$

であり，$\overline{\text{co}}\{T_t x : t \in S\}$ は弱コンパクトなので，$\{T_{\mu_\alpha} x : \alpha \in I\}$ の部分ネット

$$\{T_{\mu_{\alpha_\beta}} : \beta \in J\}$$

で $T_{\mu_{\alpha_\beta}}x$ が $\overline{\text{co}}\{T_t x\colon t\in S\}$ の元 x_0 に弱収束するものが存在する．$T_{\mu_\alpha}x$ が Qx に弱収束することを示すためには，$x_0=Qx$ であることを示せば十分である．$x^*\in E^*$ とし，$s\in S$ とする．$T_{\mu_{\alpha_\beta}}x$ が x_0 に弱収束するので

$$(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, x^*)\to(x_0, x^*)$$
$$(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, T_s{}^*x^*)\to(x_0, T_s{}^*x^*)=(T_s x_0, x^*)$$

である．一方，$\mu_{\alpha_\beta}-l_s{}^*\mu_{\alpha_\beta}$ が弱*位相のもとで 0 に収束するので

$$\begin{aligned}&(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, x^*)-(l_s{}^*\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, x^*)\\&\quad=(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, x^*)-(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_{st}x, x^*)\\&\quad=(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, x^*)-(\mu_{\alpha_\beta})_t(T_t x, T_s{}^*x^*)\to 0\end{aligned}$$

となる．よって $(x_0, x^*)=(T_s x_0, x^*)$ である．それゆえ，$x_0\in F(\mathcal{S})$ である．補助定理 4.4.4 から $Qx=T_\mu x=x_0$ を得る．Q が漸近的に不変なネットによらないことは補助定理 4.4.3 より明らかである．▨

系 4.4.6　E を Banach 空間とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を E 上の線形連続作用素の C-半群とする．このとき，$C(S)$ 上に invariant mean が存在するならば，つぎの条件を満たす E から $F(\mathcal{S})$ の上への射影 Q が一意に存在する．

(1)　$\|Q\|\leqq C$;

(2)　$QT_t=T_tQ=Q$ $(\forall t\in S)$;

(3)　$Qx\in\overline{\text{co}}\{T_t x\colon t\in S\}$ $(\forall x\in E)$.

$T_{\mu_\alpha}x$ の強収束性に関してはつぎの定理が成り立つ．

定理 4.4.7（木戸-高橋のエルゴード定理）　E を Banach 空間とし，$\mathcal{S}=\{T_t\colon t\in S\}$ を E 上の線形連続作用素の C-半群とする．$\{\mu_\alpha\colon \alpha\in I\}$ を $C(S)$ 上の mean のネットで，漸近的に不変であるとする．このとき，$\mu_\alpha-r_s{}^*\mu_\alpha$ が $C(S)^*$ のノルムの意味で 0 に収束するならば，つぎの条件を満たす E から $F(\mathcal{S})$ の上への射影が存在する．

(1)　$\|Q\|\leqq C$;

(2)　任意の $x\in E$ に対して，$T_{\mu_\alpha}x$ は Qx に強収束する;

(3)　$QT_t=T_tQ=Q$ $(\forall t\in S)$;

(4)　$Qx\in\overline{\text{co}}\{T_t x\colon t\in S\}$ $(\forall x\in E)$.

証明　定理 4.4.5 のようにして，$Q=T_\mu$ としよう．ただし，μ は mean のネット $\{\mu_\alpha\colon \alpha\in I\}$ の収積点である．任意の $x\in E$ に対して，$T_{\mu_\alpha}x$ が Qx に強収束することを示せばよい．

$$E_0=\overline{\text{co}}\{y-T_t y\colon y\in E,\ t\in S\}$$

とする．このとき，$z\in E_0$ に対して，$T_{\mu_\alpha}z$ は 0 に強収束する．実際，$z=y-T_s y$

とするならば，任意の $y^*\in E^*$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|(T_{\mu_\alpha}z, y^*)| &= |(\mu_\alpha)_t(T_t(y-T_sy), y^*)|\\
&= |(\mu_\alpha)_t(T_ty, y^*)-(\mu_\alpha)_t(T_{ts}y, y^*)|\\
&= |(\mu_\alpha-(r_s{}^*\mu_\alpha))_t(T_ty, y^*)|\\
&\leqq \|\mu_\alpha-r_s{}^*\mu_\alpha\|\cdot\sup_{t\in S}|(T_ty, y^*)|\\
&\leqq \|\mu_\alpha-r_s{}^*\mu_\alpha\|\cdot C\|y\|\cdot\|y^*\|
\end{aligned}
$$

となるので，$\|T_{\mu_\alpha}z\|\leqq C\|\mu_\alpha-r_s{}^*\mu_\alpha\|\|y\|$ を得る．よって $T_{\mu_\alpha}z\to 0$ である．

つぎに，z を E_0 の任意の元とし，$\varepsilon>0$ としよう．E_0 の定義から，

$$\varepsilon>2C\left\|z-\sum_{i=1}^n a_i(y_i-T_{s_i}y_i)\right\|$$

となるような $\mathrm{co}\{y-T_sy:\ y\in E,\ s\in S\}$ の元 $\sum_{i=1}^n a_i(y_i-T_{s_i}y_i)$ が存在する．一方すべての $s\in S$ に対して，$\|\mu_\alpha-r_s{}^*\mu_\alpha\|\to 0$ であるから，ある $\alpha_0\in I$ が存在して，すべての $\alpha\geqq\alpha_0$ と $i=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\varepsilon>\|\mu_\alpha-r_{s_i}{}^*\mu_\alpha\|\cdot 2C\|y_i\|$$

となるようにできる．これから

$$
\begin{aligned}
\|T_{\mu_\alpha}z\| &\leqq \left\|T_{\mu_\alpha}z-T_{\mu_\alpha}\left(\sum_{i=1}^n a_i(y_i-T_{s_i}y_i)\right)\right\|+\left\|T_{\mu_\alpha}\left(\sum_{i=1}^n a_i(y_i-T_{s_i}y_i)\right)\right\|\\
&\leqq \|T_{\mu_\alpha}\|\left\|z-\sum_{i=1}^n a_i(y_i-T_{s_i}y_i)\right\|+\sum_{i=1}^n a_i\|T_{\mu_\alpha}(y_i-T_{s_i}y_i)\|\\
&\leqq C\left\|z-\sum_{i=1}^n a_i(y_i-T_{s_i}y_i)\right\|+\sup_i\|\mu_\alpha-r_{s_i}{}^*\mu_\alpha\|\cdot C\|y_i\|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．よって $T_{\mu_\alpha}z$ は 0 に強収束する．

つぎにある $x\in E$ に対して，$x-T_\mu x$ が E_0 に入らないと仮定しよう．このとき，Hahn–Banach の定理によって，

$$
\begin{aligned}
&(x-T_\mu x, y^*)=1,\\
&(z, y^*)=0 \qquad ({}^\forall z\in E_0)
\end{aligned}
$$

となるような $y^*\in E^*$ が存在する．すべての $t\in S$ に対して，$x-T_tx\in E_0$ であるので，

$$(x-T_\mu x, y^*)=\mu_t(x-T_tx, y^*)=0$$

を得る．これは矛盾である．よって，すべての $x\in E$ に対して $x-T_\mu x\in E_0$ である．だから，すべての $x\in E$ に対して

$$T_{\mu_\alpha}x-T_\mu x=T_{\mu_\alpha}(x-T_\mu x)$$

は0に強収束する．これで証明を完了する． ▨

問 題 4.4

1. $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を E 上の線形連続作用素の C-半群とし，μ を $C(S)$ 上の mean とする．このとき，

$$\mu_t(T_t x, x^*)=(T_\mu x, x^*) \qquad (x\in E,\ x^*\in E^*)$$

で定義される E 上の線形連続作用素 T_μ は

$$\|T_\mu\|\leqq C, \qquad T_\mu x\in\overline{\mathrm{co}}\{T_t x:\ t\in S\} \quad (^\forall x\in E)$$

を満たす．これを示せ．

2. E を Banach 空間とし，T を $\|T^n\|\leqq C$ $(n=1,2,\cdots)$ となる E 上の弱完全連続作用素とする．このとき，E から $F(T)$ の上への射影 Q で，つぎのような条件を満たすものが存在する．

(1) $\|Q\|\leqq C$;

(2) 任意の $x\in E$ に対して，$S_n x=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}T^k x$ が Qx に強収束する;

(3) $QT=TQ=Q$.

注 Banach 空間 E 上の線形作用素 T が**弱完全連続作用素**であるとは E の閉単位球 B に対して，$\overline{T(B)}$ が弱コンパクトとなるときをいう．

3. E を Banach 空間とし，$\mathcal{S}=\{T_t:\ t\in[0,\infty)\}$ を E 上の線形連続作用素の C-半群とする．このとき，E から $F(\mathcal{S})$ の上への射影 Q で，つぎの条件を満たすものが存在する．

(1) $\|Q\|\leqq C$;

(2) 任意の $x\in E$ に対し，$\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T T_t x\,dt$ は Qx に強収束する;

(3) $QT_t=T_tQ=Q$ $(^\forall t\in[0,\infty))$.

4. 2の条件のもとで，任意の $x\in E$ に対し

$$(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}r^k T^k x \qquad (r\uparrow 1)$$

が強収束することを示せ．

5. 3の条件のもとで，任意の $x\in E$ に対し，

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x\,dt \qquad (\lambda\downarrow 0)$$

が強収束することを示せ．

5

線形位相空間における不動点理論

この章では Brouwer の不動点定理と 1 の分解定理を用いて，まず Fan–Browder の不動点定理を証明し，そのあとコンパクト凸集合上で証明されるいくつかの基本定理を系統的に得ることを試みる．

5.1 Fan–Browder の不動点定理

この節では，Fan–Browder の不動点定理の拡張定理を得，そのあと，その直接的結果としていくつかの存在定理を得る．

まずよく知られている Brouwer の不動点定理を証明なしで挙げておく．

定理 5.1.1 (Brouwer の不動点定理)　X を n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクトで凸な集合とし，T を X から X への連続な写像とする．そのとき，X の中に T の不動点が存在する．

つぎに 1 の分解定理を証明する．その前に補助定理を証明しておく．

補助定理 5.1.2　X を正規空間とし，$\{G_i\}_{i=1}^n$ を X の開被覆とする．このとき，各 i に対して，閉集合 F_i を選んで

$$F_i \subset G_i, \qquad \bigcup_{i=1}^n F_i = X$$

が成り立つようにできる．

証明　$G_1{}^c = K_1$，$\left(\bigcup_{i=2}^n G_i\right)^c = H_1$ とすると，K_1, H_1 は閉集合であり，かつ

$$K_1 \cap H_1 = G_1{}^c \cap \left(\bigcup_{i=2}^n G_i\right)^c = \left[G_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^n G_i\right)\right]^c = X^c = \phi$$

である．X は正規空間なので，$K_1 \subset U_1$，$H_1 \subset V_1$，$U_1 \cap V_1 = \phi$ となる開集合

U_1, V_1 がある．よって $\bar{V}_1\subset U_1{}^c\subset K_1{}^c=G_1$ である．また $\left(\bigcup_{i=2}^{n} G_i\right)^c=H_1\subset V_1$ であるから，$V_1\cup\left(\bigcup_{i=2}^{n} G_i\right)=X$ である．ゆえに $\{V_1, G_2, G_3, \cdots, G_n\}$ は X の開被覆である．上の議論を G_2 と $\{V_1, G_3, G_4, \cdots, G_n\}$ に対して行えば，$\bar{V}_2\subset G_2$ で，

$$V_2\cup(V_1\cup G_3\cup\cdots\cup G_n)=X$$

となる開集合 V_2 が得られる．同様の方法を繰り返せば

$$\bar{V}_i\subset G_i, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} V_i=X$$

となる開集合族 $\{V_i\}_{i=1}^n$ を得ることができる．$F_i=\bar{V}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とおけば，$F_i\subset G_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ であり，$\bigcup_{i=1}^{n} F_i=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{V}_i=X$ となり求める閉集合族 $\{F_i\}_{i=1}^n$ が得られる． ▨

定理 5.1.3（1の分解定理） X を正規空間とし，$\{G_i\}_{i=1}^n$ を X の開被覆とする．このとき，各 i に対して，つぎの性質を満たす X 上の実数値連続関数 β_i が存在する．

（1） $0\leqq\beta_i(x)\leqq 1$ $(\forall x\in X)$;

（2） $x\notin G_i$ ならば $\beta_i(x)=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$;

（3） $\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)=1$ $(\forall x\in X)$.

証明 補助定理 5.1.2 により，

$$F_i\subset G_i\ (i=1,2,\cdots,n), \qquad \bigcup_{i=1}^{n} F_i=X$$

となる閉集合族 $\{F_i\}_{i=1}^n$ が存在する．Urysohn の補題から，各 i に対して

$$\varphi_i(x)=1\ (\forall x\in F_i), \quad \varphi_i(x)=0\ (\forall x\notin G_i), \quad 0\leqq\varphi_i(x)\leqq 1\ (\forall x\in X)$$

となる連続関数 φ_i が存在する．そこで各 i に対して

$$\beta_i(x)=\frac{\varphi_i(x)}{\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)}$$

とおくと，$\bigcup_{i=1}^{n} F_i=X$ であることより，$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)>0$ であるから，$\beta_i(x)$ は意味をもち，求める関数であることがわかる． ▨

注 連続関数族 $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ を X の開被覆 $\{G_i\}_{i=1}^n$ に対応する **1の分解**という．

コンパクト Hausdorff 空間は正規空間であるからつぎの定理がいえる．

定理 5.1.4 X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$\{G_i\}_{i=1}^n$ を X の開被覆とする．このとき，各 i に対して，つぎの性質を満たす X 上の実数値連続関数 β_i が存在する．

（1） $0\leqq\beta_i(x)\leqq 1$ $(\forall x\in X)$;

（2）　$x \notin G_i$ ならば $\beta_i(x)=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$;

（3）　$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)=1$ $(\forall x \in X)$.

注　実際には定理 5.1.3 より定理 5.1.4 がよく用いられる.

つぎの定理は Fan–Browder の不動点定理の拡張定理である.

定理 5.1.5（高橋の不動点定理）　Y を線形位相空間 E のコンパクト集合とし，X を E の凸部分集合で，$X \subset Y$ となるものとする．A を X から 2^Y（Y の部分集合の全体）への写像で，任意の $y \in Y$ に対して，$A^{-1}y$ がつねに凸集合になっているものとする．このとき，X から 2^Y への写像 B で，つぎの 3 つの条件:

（1）　任意の $x \in X$ に対して，$Bx \subset Ax$ である;

（2）　任意の $y \in Y$ に対して，$B^{-1}y \neq \phi$ である;

（3）　任意の $x \in X$ に対して，Bx は開集合である

を満たすものが存在するならば，$x_0 \in Ax_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する.

証明　すべての $y \in Y$ に対して，$B^{-1}y \neq \phi$ であるから

$$Y = \bigcup_{x \in X} Bx$$

である．すなわち，$\{Bx\colon x \in X\}$ は Y の開被覆となっている．Y はコンパクトなので，$Y=\bigcup_{i=1}^{n} Bx_i$ となるような $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ が存在する．ここで定理 5.1.4 を用いて，Y の有限開被覆 $\{Bx_1, Bx_2, \cdots, Bx_n\}$ に対応する 1 の分解 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ が存在する．Y 上の写像 p をこの β_i を用いて

$$p(y)=\sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) x_i \qquad (\forall y \in Y)$$

で定義する．すると，すべての $y \in Y$ に対して，$p(y) \in A^{-1}y$ である．なぜなら，$y \in Y$ に対して，$\beta_i(y) \neq 0$ ならば，$y \in Bx_i$ である．よって $B^{-1}y \ni x_i$ である．（1）より $B^{-1}y \subset A^{-1}y$ であり（問題 5.1.1），$A^{-1}y$ は凸集合であるから，$p(y) \in A^{-1}y$ である．X_0 を $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ によって張られる凸集合とすると，この X_0 は $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト凸集合 K と同相になるから，X_0 から K への同相写像を f とする．すると，fpf^{-1} は K から K への連続写像になる．よって Brouwer の不動点定理を用いると

$$fpf^{-1}(x_0)=x_0$$

となるような $x_0 \in K$ が存在する．これは

$$pf^{-1}(x_0)=f^{-1}(x_0)$$

を意味する．いま $y_0=f^{-1}(x_0)$ とすると，$y_0=p(y_0)$ である．$p(y_0) \in A^{-1}y_0$ であるから，$y_0 \in A^{-1}y_0$ となる．よって $y_0 \in Ay_0$ である．▨

定理5.1.5で$X=Y, A=B$とするとFan–Browderの不動点定理が得られる．

定理 5.1.6 (Fan–Browder の不動点定理) Xを線形位相空間Eのコンパクトな凸集合とする．Aをつぎの条件（1）と（2）を満たすXから2^X（Xの部分集合の全体)への写像とする．

（1） 任意の$y \in X$に対して，$A^{-1}y$は空でない凸集合である;

（2） 任意の$x \in X$に対して，Axは開集合である．

このとき，$x_0 \in Ax_0$となる$x_0 \in X$が存在する．

同様に，つぎの定理も証明できる(問題5.1.2)．

定理 5.1.7 (Fan–Browder の不動点定理の変形) Xを線形位相空間Eのコンパクトな凸集合とする．Aをつぎの条件（1）と（2）を満たすXから2^Xへの写像とする．

（1） 任意の$y \in X$に対して，$A^{-1}y$は開集合である;

（2） 任意の$x \in X$に対して，Axは空でない凸集合である．

このとき，$x_0 \in Ax_0$となる$x_0 \in X$が存在する．

この定理はA: $X \to 2^X$の代わりに，$A \subset X \times X$を用いて，つぎのようにも表すことができる．

定理 5.1.8 Xを線形位相空間Eのコンパクトな凸集合とし，$A \subset X \times X$をつぎの条件（1),（2),（3）を満たすものとする．

（1） 任意の$y \in X$に対して，$\{x \in X: (x, y) \in A\}$は閉集合である;

（2） 任意の$x \in X$に対して，$\{y \in X: (x, y) \notin A\}$は凸集合である;

（3） 任意の$x \in X$に対して，$(x, x) \in A$である．

このとき，$x_0 \times X \subset A$となる$x_0 \in X$が存在する．

証明 背理法によって証明する．任意の$x \in X$に対して，$(x, y) \notin A$となる$y \in X$の存在を仮定する．いま$x \in X$に対して，

$$Tx = \{y \in X: (x, y) \notin A\}$$

とすると，Txは空でない凸集合である．また，$T^{-1}y = \{x \in X: (x, y) \notin A\}$は開集合であるので，定理5.1.7を用いて，$x_0 \in Tx_0$となる点$x_0 \in X$が存在する．すなわち，$(x_0, x_0) \notin A$である．これは（3）に矛盾する．よって$x_0 \times X \subset A$となる$x_0 \in X$が存在する． ▨

定理5.1.8の直接的な結果として，つぎの使いやすい定理を得る．

定理 5.1.9 Xを線形位相空間のコンパクトな凸集合とし，Fをつぎの条件（1),（2),（3）を満たす$X \times X$上の実数値関数とする．

（1） 任意の$y \in X$に対して，xの関数$F(x, y)$は上半連続である;

（2） 任意の $x \in X$ に対して，y の関数 $F(x,y)$ は凸関数である;

（3） $F(x,x) \geqq c$ $(\forall x \in X)$ となるような実数 c が存在する.

このとき，$F(x_0,y) \geqq c$ $(\forall y \in X)$ となるような $x_0 \in X$ が存在する.

証明 いま，

$$A=\{(x,y)\in X\times X:\ F(x,y)\geqq c\}$$

とする．このとき，$y \in X$ に対して，x の関数として $F(x,y)$ は上半連続だから，$\{x \in X:\ (x,y) \in A\}$ は閉集合となる．任意の $x \in X$ に対し $(x,x) \in A$ は仮定より明らかである．A が定理 5.1.8 の（2）を満たすことを示す．$x \in X$ に対して，集合 $C=\{y \in X:\ (x,y) \notin A\}$ は $\{y \in X:\ F(x,y)<c\}$ となる集合であるが，いま

$$C_n=\left\{y\in X:\ F(x,y)\leqq c-\frac{1}{n}\right\}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

とすると，C_n は y の関数として $F(x,y)$ が凸関数なので凸集合となる.

$$C=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

なので，C は凸集合となる(問題 5.1.3)．これで定理 5.1.8 が使えて，$x_0 \times X \subset A$ となるような $x_0 \in X$ が存在する．すなわち，すべての $y \in X$ に対して $F(x_0,y) \geqq c$ となるような $x_0 \in X$ が存在する. ▨

問　題 5.1

1. X, Y を空でない集合とし，A と B を X から Y への多価写像とする．このとき，任意の $x \in X$ に対して $Bx \subset Ax$ ならば，任意の $y \in Y$ に対して $B^{-1}y \subset A^{-1}y$ である．これを示せ.

2. 定理 5.1.7(Fan–Browder の不動点定理の変形)を証明せよ.

3. $\{S_\mu:\ \mu \in M\}$ を線形空間 E の凸集合の族とする．このとき，任意の $\mu_1, \mu_2 \in M$ に対して，$S_{\mu_1} \subset S_{\mu_3}$，$S_{\mu_2} \subset S_{\mu_3}$ となる $\mu_3 \in M$ が存在するならば $\bigcup_{\mu \in M} S_\mu$ も凸集合となることを示せ.

4. X を線形位相空間のコンパクトな凸集合とし，F をつぎの条件（1），（2），（3）を満たす $X \times X$ 上の実数値関数とする.

（1） 任意の $y \in X$ に対して，x の関数 $F(x,y)$ は下半連続である;

（2） 任意の $x \in X$ に対して，y の関数 $F(x,y)$ は凹関数である;

（3） $F(x,x) \leqq c$ $(\forall x \in X)$ となるような実数 c が存在する.

このとき，$F(x_0,y) \leqq c$ $(\forall y \in X)$ となるような $x_0 \in X$ が存在する.

5.2 拡張された不動点定理

まず定理 5.1.9 を用いて，Tychonoff の不動点定理と Schauder の不動点定理を拡張しよう．

定理 5.2.1 (Tychonoff の不動点定理の拡張) X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトな凸集合とし，T を X から E への連続写像とする．このとき，つぎの（1）あるいは（2）が成立する．

（1） $Ty_0=y_0$ となる $y_0\in X$ が存在する；

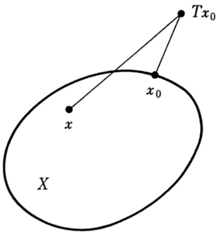
（2）
$$0<p(x_0-Tx_0)=\min_{x\in X} p(x-Tx_0)$$
となるような点 $x_0\in X$ と E 上の連続セミノルム p が存在する．

証明 （1）を否定しよう．すると任意の $x\in X$ に対して，$p_x(x-Tx)>0$ となるような E 上の連続セミノルム p_x が存在する．いま
$$G_x=\{y\in X:\ p_x(y-Ty)>0\}$$
とおくと，$\{G_x:\ x\in X\}$ は X の開被覆となる．X はコンパクトなので，その有限開被覆 $\{G_{x_1}, G_{x_2}, \cdots, G_{x_n}\}$ が存在する．この開被覆に対応する 1 の分解を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ とし，$X\times X$ 上の関数 F を
$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)p_{x_i}(y-Tx)-\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)p_{x_i}(x-Tx)$$
とおくと，y を固定したとき，x の関数 $F(x,y)$ は連続であり，x を固定したとき，y の関数 $F(x,y)$ は凸関数となる．よって F は定理 5.1.9 の（1），（2）を満たす．さらに $x\in X$ に対して $F(x,x)=0$ である．ゆえに定理 5.1.9 が使えて，すべての $y\in X$ に対して，$F(x_0,y)\geqq 0$ となるような $x_0\in X$ が存在する．すなわち，すべての $y\in X$ に対して，
$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(y-Tx_0)\geqq\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(x_0-Tx_0)>0$$
となる不等式を得る．ここで，
$$p=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}$$
とおくと，すべての $y\in X$ に対して，$p(y-Tx_0)\geqq p(x_0-Tx_0)>0$ となり，（2）の
$$0<p(x_0-Tx_0)=\min_{x\in X} p(x-Tx_0)$$
となるような点 $x_0\in X$ と E 上の連続セミノルム p が存在したことになる． ▨

定理 5.2.2 (Schauder の不動点定理の拡張)　X をノルム空間 E のコンパクトな凸集合とし，T を X から E への連続写像とする．このとき，

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{x\in X}\|x - Tx_0\|$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．



証明　$X\times X$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \|y - Tx\| - \|x - Tx\|$$

とおけば，$F(x, y)$ は x の関数として連続であり，y の関数として凸関数となっている．またすべての $x\in X$ に対して $F(x, x)=0$ である．よって定理 5.1.9 より，すべての $y\in X$ に対して $F(x_0, y) \geqq 0$ となる $x_0\in X$ が存在する．これはすべての $y\in X$ に対して，$\|y - Tx_0\| \geqq \|x_0 - Tx_0\|$ となる $x_0\in X$ の存在を意味する．ゆえに，

$$\|x_0 - Tx_0\| = \min_{x\in X}\|x - Tx_0\|$$

となる $x_0\in X$ が存在する．▨

定理 5.2.1 と定理 5.2.2 において，T を X から X への連続写像とすると，よく知られた Tychonoff の不動点定理と Schauder の不動点定理が得られる．

定理 5.2.3 (Tychonoff の不動点定理)　X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，T を X から X への連続写像とする．このとき，

$$Tz = z$$

となる点 $z\in X$ が存在する．

証明　T を X から X への連続写像とする．このとき，定理 5.2.1 の（2）が成り立つとすると，

$$0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{x\in X} p(x - Tx_0)$$

となるような点 $x_0\in X$ と E 上の連続セミノルム p が存在することになる．ところで，$x = Tx_0 \in X$ とすると，$\min_{x\in X} p(x - Tx_0) = 0$ となり，これは矛盾である．よって，（1）が成り立つ．すなわち，$Tz=z$ となる $z\in X$ が存在する．▨

定理 5.2.4 (Schauder の不動点定理)　X をノルム空間 E のコンパクトで凸な集合とし，T を X から X への連続写像とする．このとき，

$$Tx_0 = x_0$$

となる $x_0\in X$ が存在する．

証明　定理 5.2.2 より明らか．▨

注　Schauder の不動点定理は Banach 空間で証明されたものであるが，実はノルム空

間で十分であることがこの定理からわかる．

つぎに Fan の不動点定理の拡張を得よう．

X, Y を位相空間とし，f を X の点 x を Y の空でない閉集合 $f(x)$ に値をとる多価写像とする．このとき f が x_0 で**上半連続**(upper semicontinuous)であるとは，$f(x_0)$ の近傍 V に対して，x_0 の近傍 U が存在して

$$y \in U \text{ ならば } f(y) \subset V$$

が成り立つときをいう．

f が **X で上半連続**，または単に**上半連続**であるとは，f が X の任意の点で上半連続なるときをいう．

定理 5.2.5 (Fan の不動点定理の拡張) X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，T を X から E への上半連続な写像で，任意の $x \in X$ に対して，Tx が空でない閉で凸な集合となるものとする．このとき，つぎの（1）または（2）が成立する．

（1） $y_0 \in Ty_0$ となる $y_0 \in X$ が存在する；

（2） $g(x_0-z) < 0 \leqq \inf_{y \in X} g(x_0-y)$ $(\forall z \in Tx_0)$

となる $x_0 \in X$ と連続線形汎関数 $g \in E^*$ が存在する．

証明 T が X の中に不動点をもたないとしよう．このとき，任意の $y \in X$ に対して

$$\sup\{f_y(v)\colon v \in y-Ty\} < f_y(0) = 0$$

となるような $f_y \in E^*$ が存在する．$N(f_y)$ を集合

$$\{u \in X\colon f_y(v) < 0,\ v \in u-Tu\}$$

の内点の全体とすると，$y \in N(f_y)$ は明らかである．よって

$$X = \bigcup_{y \in X} N(f_y)$$

である．X はコンパクトであるので

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} N(f_{y_i})$$

となるような X の有限集合 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ が存在する．$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ を X の開被覆 $\{N(f_{y_1}), N(f_{y_2}), \cdots, N(f_{y_n})\}$ に対応する 1 の分解とし，$X \times X$ 上の関数を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_{y_i}(x-y)$$

で定義する．定理 5.1.9 を用いると，すべての $y \in X$ に対して，$F(x_0, y) \geqq 0$ となるような $x_0 \in X$ が存在する．一方この $x_0 \in X$ と Tx_0 の任意の点 z に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_{y_i}(x_0 - z) < 0$$

でもある．いま

$$g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_{y_i}$$

とおくことによって，定理の証明は完了する． ▨

この定理の直接的結果として，つぎの Fan の不動点定理を得る．

定理 5.2.6 (Fan の不動点定理)　X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，T を X から X への上半連続な写像で，点 x を空でない閉で凸な集合 Tx にうつすものとする．このとき，$x_0 \in Tx_0$ となる点 $x_0 \in X$ が存在する．

これを用いると，つぎの興味ある存在定理(定理 5.2.9)が得られるが，その前に補助定理を2つ証明しておく．

補助定理 5.2.7　X を位相空間とし，Y をコンパクト Hausdorff 空間とする．このとき，f が x_0 で上半連続であるための必要十分条件は，

$$x_\alpha \to x_0,\ \ y_\alpha \to y,\ \ y_\alpha \in f(x_\alpha) \ \text{ならば}\ y \in f(x_0)$$

となることである．

証明　f が x_0 で上半連続であるとし，$x_\alpha \to x_0$，$y_\alpha \to y$，$y_\alpha \in f(x_\alpha)$ とする．$y \notin f(x_0)$ とすると，Y はコンパクト Hausdorff 空間であるから，$G \ni y$，$H \supset f(x_0)$，$G \cap H = \phi$ となる開集合 G，H がとれる．この H に対して，f は x_0 で上半連続であるから，x_0 の近傍 U があって，$x \in U$ ならば $f(x) \subset H$ とできる．$x_\alpha \to x_0$ であるから，α_1 が存在して，$\alpha \geqq \alpha_1$ ならば $x_\alpha \in U$ となる．よって，$f(x_\alpha) \subset H$ となり，$y_\alpha \in H$ $(\alpha \geqq \alpha_1)$．一方 $y_\alpha \to y$ であるから，α_2 があって，$\alpha \geqq \alpha_2$ ならば $y_\alpha \in G$．いま $\alpha_1, \alpha_2 \leqq \alpha_3$ となる α_3 をとると，$y_{\alpha_3} \in G$，$y_{\alpha_3} \in H$ となって，$G \cap H = \phi$ に矛盾する．

逆を示す．f は x_0 で上半連続でないとする．そうすると，$f(x_0)$ の近傍 V が存在して，x_0 のどんな近傍 U に対しても，$x_U \in U$ で，$f(x_U) \not\subset V$ となる x_U が存在する．各 U に対して，y_U を $y_U \in f(x_U)$ で $y_U \notin V$ となるようにとると，$\{y_U\}_U$ は有向点列となる．Y はコンパクトであるから，$y_{U_\alpha} \to y$ となるような $\{y_U\}$ の部分有向点列 $\{y_{U_\alpha}\}$ が存在する．そうすると，

$$x_{U_\alpha} \to x_0, \quad y_{U_\alpha} \to y, \quad y_{U_\alpha} \in f(x_{U_\alpha})$$

であるが，$y \notin V$ であるから，$y \notin f(x_0)$ となる． ▨

補助定理 5.2.8　X を位相空間とし，Y をコンパクト Hausdorff 空間とす

る．このとき，f が X で上半連続であるための必要十分条件は，f のグラフ

$$G(f)=\{(x,y):\ y\in f(x),x\in X\}$$

が $X\times Y$ で閉集合となることである．

証明 f が X で上半連続であるとし，$(x_\alpha,y_\alpha)\to(x,y)$，$(x_\alpha,y_\alpha)\in G(f)$ とすると，$x_\alpha\to x$，$y_\alpha\to y$，$y_\alpha\in f(x_\alpha)$ である．補助定理 5.2.7 より，$y\in f(x)$ となり，$G(f)$ は閉集合であることがわかる．

逆を示す．$x_\alpha\to x$，$y_\alpha\to y$，$y_\alpha\in f(x_\alpha)$ とする．このとき，$(x_\alpha,y_\alpha)\to(x,y)$ であり，$G(f)$ は閉集合であるから，$(x,y)\in G(f)$ となり，$y\in f(x)$ となる．補助定理 5.2.7 より，f は x で上半連続である．x は任意であるから，f は X で上半連続である． ▨

定理 5.2.9 X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，g を $X\times X$ から線形位相空間 F への連続写像とする．C を F の閉集合とし，もし，任意の $x\in X$ に対して

$$\{y\in X:\ g(x,y)\in C\}$$

がつねに空でない凸集合となるとき，$g(x_0,x_0)\in C$ となる点 $x_0\in X$ が存在する．

証明 X から X への多価写像 T を

$$Tx=\{y\in X:\ g(x,y)\in C\}$$

とする．T が上半連続となることは，補助定理 5.2.8 より，T のグラフ

$$G(T)=\{(x,y):\ x\in X,\ y\in Tx\}$$

が閉集合 $g^{-1}(C)$ と一致することからわかる．Fan の不動点定理から，$x_0\in Tx_0$ となる $x_0\in X$ の存在が保証され，$g(x_0,x_0)\in C$ を得る． ▨

この定理を用いると，つぎの 2 つの系が得られる．

系 5.2.10 X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトな凸集合とし，g を $X\times X$ から線形位相空間 F への連続写像とする．$x\in X$ を固定したとき，y の関数 g はアフィンであり，さらに $x\in X$ に対して $g(x,y)=0$ となる $y\in X$ がつねに存在するとき，$g(x_0,x_0)=0$ となる $x_0\in X$ が存在する．

証明 定理 5.2.9 において，$C=\{0\}$ とすると，仮定より $x\in X$ に対して

$$\{y\in X:\ g(x,y)=0\}$$

は空でない凸集合となる．よって，$g(x_0,x_0)=0$ となる $x_0\in X$ が存在する． ▨

系 5.2.11 X を局所凸な線形位相空間 E のコンパクトな凸集合とし，C を E の閉で凸な集合とする．また f を X から E への連続写像で

$$f(X)\subset X+C$$

を満たすものとする．このとき，$f(x_0)\in x_0+C$ となる $x_0\in X$ が存在する．

証明　$g(x,y)=f(x)-y$ $(\forall x, y\in X)$ とし，定理 5.2.9 を用いれば系は証明できる． ▨

問　題 5.2

1.　X を距離空間とし，$\boldsymbol{Z}_0$ を X の空でないコンパクト集合の全体とする．このとき，X から $\boldsymbol{Z}_0$ への非拡大写像 T は X で上半連続になる．これを示せ．

2.　Banach limit μ の存在，すなわち l^∞ 上の線形汎関数 μ で，

(1)　$\|\mu\|=\mu(e)=1$;

(2)　$x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^\infty$ に対して，$\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})$ である

を満たすものが存在することを Tychonoff の不動点定理から示せ．

3.　局所凸線形位相空間における Markov–角谷の不動点定理を Tychonoff の不動点定理を用いて証明せよ．

5.3 minimax 定理

この節では，種々の minimax 定理を証明する．その前に，凸不等式のシステムに関する定理として有名な Fan の定理を証明しておこう．

定理 5.3.1 (Fan のシステム定理) X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を X 上で定義され，$(-\infty, \infty)$ に値をとる下半連続で凸な関数とする．このとき，つぎの条件（1）と（2）は同値である．

（1） n 個の不等式のシステム

$$f_i(x) \leqq c \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が解をもつ．

（2） $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leqq c$$

となる $y \in X$ が存在する．

証明 （2）における y として（1）の解をとれば，（1）$\Longrightarrow$（2）は明らかである．

（2）$\Longrightarrow$（1）: $f_i(x_0) \leqq c$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ となる $x_0 \in X$ が存在しないとする．このとき，

$$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

とすると，$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$ は X の開被覆になる．いまこの開被覆に対応する 1 の分解を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ とし，$X \times X$ 上の関数を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると，F は定理 5.1.9 の（1）と（2）を満たしており，さらに $g(x) = F(x, x)$ は下半連続である(問題 5.3.1)ことより，すべての x に対して

$$F(x, x) \geqq c_0 > c$$

となる実数 c_0 が存在する．そこで定理 5.1.9 が使えて，すべての $y \in X$ に対し

$$F(x_0, y) \geqq c_0 > c$$

となる $x_0 \in X$ の存在がわかる．すなわち，すべての $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) > c$$

であり，$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) = 1$ となるような非負の数 $\{\beta_i(x_0)\}$ が存在したことにな

る．よって（2）$\Longrightarrow$（1）は証明された． ▨

このFanのシステム定理を用いて，最初のminimax定理を証明する．

X, Yを空でない集合とし，Fを$X\times Y$上の実数値関数とする．このとき，$F(x,y)$が第2変数に関して**concavelike**であるとは，任意の$y_1, y_2\in Y$とα $(0\leqq\alpha\leqq 1)$に対して，ある$y_0\in Y$が存在して，不等式

$$F(x,y_0)\geqq\alpha F(x,y_1)+(1-\alpha)F(x,y_2) \qquad (\forall x\in X)$$

がつねに成立することである．同様に，**convexlike**についても，不等式

$$F(x,y_0)\leqq\alpha F(x,y_1)+(1-\alpha)F(x,y_2) \qquad (\forall x\in X)$$

がつねに成り立つとして定義できる．

定理 5.3.2 (minimax定理)　Xを線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，Yを単なる集合とする．Fを$X\times Y$上の実数値関数でつぎの（1）と（2）の条件を満たすものとする．

（1）　$y\in Y$を固定したとき，xの関数$F(x,y)$は下半連続な凸関数である;

（2）　$F(x,y)$は第2変数に関してconcavelikeである．

このとき，

$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y).$$

証明　$c=\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)$とし，$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$を$Y$の任意の有限集合とする．いま，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$となる$n$個の非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$をとると，（2）より，$y_0\in Y$が存在して，すべての$x\in X$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF(x,y_i)\leqq F(x,y_0)$$

となる．このy_0に対して，$c=\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)$より，$F(x_0,y_0)\leqq c$となる$x_0\in X$が存在する．すなわち，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$となる非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iF(x_0,y_i)\leqq F(x_0,y_0)\leqq c$$

となる$x_0\in X$が存在する．ここでFanのシステム定理を用いると，

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{x\colon F(x,y_i)\leqq c\}\neq\phi$$

がいえたことになる．Xがコンパクトなので

$$\bigcap_{y\in Y}\{x\colon F(x,y)\leqq c\}\neq\phi$$

となる．これは$\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y)\leqq c$を意味するので

$$c=\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)\geqq\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x,y)$$

である．逆の不等式は明らかであるから

$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in X} F(x,y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in Y} F(x,y).$$ ▨

つぎに，Sion の minimax 定理を証明する．

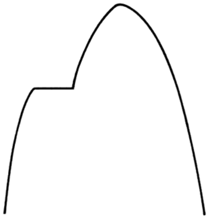
X を線形空間の凸集合とし，f を X 上の実数値関数とする．このとき，f が **quasiconcave** であるとは，任意の実数 α に対してつねに，

$$\{x\in X\colon\ f(x)\geqq\alpha\}$$

が凸集合となることである．同様に，**quasiconvex** であるとは

$$\{x\in X\colon\ f(x)\leqq\alpha\}$$

がつねに凸集合となることである．



定理 5.3.3 (Sion の minimax 定理) X と Y を線形位相空間 E_1 と E_2 のコンパクトな凸集合とする．Fをつぎの条件（1）と（2）を満たす $X\times Y$ 上の実数値関数とする．

（1） $y\in Y$ を固定したとき，x の関数 $F(x,y)$ は下半連続で quasiconvex である;

（2） $x\in X$ を固定したとき，y の関数 $F(x,y)$ は上半連続で quasiconcave である．

このとき

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y} F(x,y)=\max_{y\in Y}\min_{x\in X} F(x,y).$$

証明 等式が成立しないとする．すなわち

$$\max_{y\in Y}\min_{x\in X} F(x,y)<c<\min_{x\in X}\max_{y\in Y} F(x,y)$$

としよう．いま，

$$A_x=\{y\in Y\colon\ F(x,y)<c\},$$
$$B_y=\{x\in X\colon\ F(x,y)>c\}$$

として，$X\times Y$ から $X\times Y$ への多価写像 T を

$$T(x,y)=B_y\times A_x$$

とすると，T は Fan–Browder の不動点定理の（1），（2）の条件を満たしている．実際，$T(x,y)$ が開集合になっていることは明らかであり，$T^{-1}(x,y)$ は空でない凸集合でもある．なぜなら，(x_1,y_1)，(x_2,y_2) を $T^{-1}(x,y)$ の元とし，$a,b>0$，$a+b=1$ とする．$(x,y)\in T(x_1,y_1)\cap T(x_2,y_2)$ なので

$$F(x,y_1)>c,\ \ F(x_1,y)<c,\ \ F(x,y_2)>c,\ \ F(x_2,y)<c$$

を得る．各 $y\in Y$ に対して，x の関数 $F(x,y)$ は quasiconvex であり，各 x に対して y の関数 $F(x,y)$ は quasiconcave であるので，

$$ax_1+bx_2\in\{x'\colon\ F(x',y)<c\},$$
$$ay_1+by_2\in\{y'\colon\ F(x,y')>c\}$$

がいえる．これは，$A_{ax_1+bx_2}\ni y$，$B_{ay_1+by_2}\ni x$ を意味する．よって

$$(x,y)\in T(ax_1+bx_2,ay_1+by_2)$$

となり，これは

$$T^{-1}(x,y)\ni(ax_1+bx_2,ay_1+by_2)=a(x_1,y_1)+b(x_2,y_2)$$

となる．よって $T^{-1}(x,y)$ は凸集合である．それゆえ，Fan–Browder の定理から

$$(x_0,y_0)\in T(x_0,y_0)$$

となる $(x_0,y_0)\in X\times Y$ が存在する．これを書きなおすと

$$c<F(x_0,y_0)<c$$

となり矛盾である． ▨

Fan のシステム定理においてコンパクト性と凸性をはずすとつぎのようになる．

定理 5.3.4（高橋のシステム定理） X をある集合，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ を X 上の実数値関数とする．$I=\{1,2,\cdots,n\}$ とし，$X\times I$ 上の関数 F を

$$F(x,i)=f_i(x)\qquad(\forall i\in I,\ \forall x\in X)$$

で定義する．F は第1変数に関して convexlike であるとする．$c\in\boldsymbol{R}$ とする．もし，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ なる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(x_0)\leqq c$$

となる $x_0\in X$ が存在するならば，

$$\inf_{x\in X}\max_{i}f_i(x)\leqq c.$$

証明
$$Y=\left\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\colon\ \alpha_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\right\}$$

とし，

$$f(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_if_i(x)\qquad(\forall x\in X,\ \forall\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in Y)$$

とする．すると，f は第1変数に関して convexlike である．実際 $F(x,i)=f_i(x)$ は第1変数に関して convexlike であるから，$a+b=1$ となるような $a,b\geqq 0$ と $x,y\in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
af(x,\alpha)+bf(y,\alpha)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\{af_i(x)+bf_i(y)\}\\
&\geqq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(z)\\
&=f(z,\alpha)\qquad ({}^\forall\alpha\in Y)
\end{aligned}
$$

となるような $z\in X$ が存在する．だから定理 5.3.2 によって

$$\inf_{x\in X}\max_{\alpha\in Y} f(x,\alpha)=\max_{\alpha\in Y}\inf_{x\in X} f(x,\alpha)\leqq c$$

となる．$f(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$ であるから，

$$\inf_{x\in X}\max_{i} f_i(x)\leqq c.$$ ▨

この定理で X を凸集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を凸関数とするとつぎのような定理になる．

定理 5.3.5　X を線形空間の凸集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を X 上の実数値凸関数とする．もし，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)\leqq c$$

となる $x_0\in X$ が存在するならば，このとき，

$$\inf_{x\in X}\max_{i} f_i(x)\leqq c.$$

最後に Simons によって得られた minimax 定理を高橋のシステム定理を用いて証明してみよう．X を集合とし，

$$F(X)=\{X_0:\ \phi\neq X_0\subset X,\ X_0 \text{ は有限集合}\}$$

とする．

定理 5.3.6 (Simons の minimax 定理)　X, Y を任意の集合とし，f, g を $X\times Y$ 上の実数値関数で，つぎの (1), (2), (3) の条件を満たすものとする．

(1)　$f(x,y)\leqq g(x,y)$　$({}^\forall(x,y)\in X\times Y)$;

(2)　f は第 2 変数に関して convexlike である;

(3)　g は第 1 変数に関して concavelike である．

このとき，つぎの (i), (ii), (iii) が成立する．

(i)　$X_0\in F(X)$, $Y_0\in F(Y)$ に対して

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y)\leqq\sup_{x\in X}\min_{y\in Y_0} g(x,y).$$

(ii)　$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y)>-\infty$ ならば，$X_0\in F(X)$ に対して

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0} f(x,y)\leqq\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} g(x,y).$$

（iii）　Yがコンパクト集合で，fが第2変数に関して下半連続ならば

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\leqq\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y).$$

証明　（i）　$\sup_{x\in X}\min_{y\in Y_0}g(x,y)=c$ とし，$X_0=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ とする．すると $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となる非負の数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i,y)\leqq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g(x_i,y)\leqq g(x_0,y)\qquad(\forall y\in Y)$$

となる $x_0\in X$ が存在する．$g(x_0,y_1)\leqq c$ である $y_1\in Y_0$ が存在するので，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i,y_1)\leqq c.$$

高橋のシステム定理より，

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0}f(x,y)\leqq c=\sup_{x\in X}\min_{y\in Y_0}g(x,y)$$

を得る．

（ii）　$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)=c$ とし，$\varepsilon>0$ とする．$X_0=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ と n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ で $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となるものに対して，（i）の場合と同様

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i,y_1)\leqq c+\varepsilon$$

となるような $y_1\in Y$ が存在する．ここで高橋のシステム定理を使って

$$\inf_{y\in Y}\max_{x\in X_0}f(x,y)\leqq c=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)$$

を得る．

（iii）　任意の有限集合 X_0 に対して，$\max_{x\in X_0}f(x,y)$ は下半連続である．また Y はコンパクトなので，$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y)=c$ とすると，$\max_{x\in X_0}f(x,y_0)\leqq c$ となる $y_0\in Y$ が存在する．そこで

$$\bigcap_{x\in X}\{y\in Y:\ f(x,y)\leqq c\}\neq\phi.$$

よって

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y)\leqq c=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}g(x,y).$$

▨

問　題 5.3

1.　定理 5.3.1 の証明の中で

$$g(x)=F(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)f_i(x)$$

は X 上で下半連続関数であるといっているが，これを証明せよ．

2. minimax 定理(定理 5.3.2)から Fan のシステム定理(定理 5.3.1)を証明せよ.

3. X をコンパクト空間とし, $\mathscr{F}$ を X 上の下半連続実数値関数の族とする. $c=\sup_{f\in\mathscr{F}}\min_{x\in X}f(x)$ とするとき, つぎの (1), (2) の条件は同値である.

(1) $\{A(f)\colon f\in\mathscr{F}\}$ は有限交叉性をもつ. ただし, 任意の $f\in\mathscr{F}$ に対し,

$$A(f)=\{x\in X\colon f(x)\leqq c\}$$

である.

(2)
$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\min_{x\in X}f(x)=\min_{x\in X}\sup_{f\in\mathscr{F}}f(x)$$

が成り立つ.

5.4 Mazur–Orlicz の定理

この節では，Markov–角谷の不動点定理と Fan のシステム定理を用いて，Mazur–Orlicz の定理を証明し，そのあと Hahn–Banach の定理の拡張定理と König の定理を証明する．

線形空間 E 上で定義され実数に値をとる関数 p が，つぎの（1）と（2）の条件を満たすならば **sublinear** であるといわれる．

（1） $p(x+y)\leqq p(x)+p(y)$ $(^\forall x, y\in E)$;

（2） $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ $(^\forall \lambda\geqq 0, {}^\forall x\in E)$.

線形空間 E に対して，その代数的共役空間を E' で表す(p. 10 を参照)．すなわち，E' は E 上の実数値線形汎関数の全体からなる線形空間である．

補助定理 5.4.1 p を線形空間 E の sublinear な関数とし，$x_0\in E$ とする．このとき，

$$f(x)\leqq p(x) \qquad (^\forall x\in E)$$

であり，しかも $f(x_0)=p(x_0)$ であるような E' の元 f が存在する．

証明 F を直積空間 $\boldsymbol{R}^E$ とする．すると F は線形位相空間となる．

$$X_0=\prod_{x\in E}[-p(-x), p(x)]$$

とおくならば，X_0 は F のコンパクトで凸集合である．いま E 上の関数 f_n を

$$f_n(x)=p(x+nx_0)-p(nx_0) \qquad (^\forall x\in E)$$

と定義するならば，$\{f_n\}\subset X_0$ となる．X_0 はコンパクトなので $\{f_n\}$ の部分ネット $\{f_{n_\alpha}\}$ で，X_0 のある元 f_0 に収束するようなものが存在する．この f_0 に対して

$$-p(-(x-y))\leqq f_0(x)-f_0(y)\leqq p(x-y) \qquad (^\forall x, y\in E)$$

が成り立つことは明らかである．また $\lambda\in\boldsymbol{R}$ に対して，ある α_0 が存在して，$\alpha\geqq\alpha_0$ ならば $\lambda+n_\alpha>0$ となるようにできる．だから

$$\begin{aligned} f_0(\lambda x_0) &= \lim_\alpha (p(\lambda x_0+n_\alpha x_0)-p(n_\alpha x_0)) \\ &= \lim_\alpha ((\lambda+n_\alpha)p(x_0)-n_\alpha p(x_0)) \\ &= \lambda p(x_0) \end{aligned}$$

となる．$A=\{f\in X_0\colon -p(-(x-y))\leqq f(x)-f(y)\leqq p(x-y) \ (^\forall x, y\in E)\}$，$B=\{f\in X_0\colon f(\lambda x_0)=\lambda p(x_0) \ (^\forall\lambda\in\boldsymbol{R})\}$ とし，$X_1=A\cap B$ とするならば，上のことから X_1 は空でない．また X_1 はコンパクトで凸集合でもある．X_1 上で

定義され X_1 に値をとる連続でアフィン写像の可換な族 $\{T_\mu : \mu \in \boldsymbol{R}\}$ を

$$(T_\mu f)(x) = f(x+\mu x_0) - f(\mu x_0) \quad (\forall f \in X_1, x \in E)$$

で定義すると，Markov–角谷の不動点定理より

$$f_1(x+\mu x_0) = f_1(x) + f_1(\mu x_0) \qquad (\forall x \in E, \mu \in \boldsymbol{R})$$

となるような $f_1 \in X_1$ が存在する．だから

$$X_2 = \{f \in X_1 : f(x+\mu x_0) = f(x) + f(\mu x_0) \ (\forall x \in E, \forall \mu \in \boldsymbol{R})\}$$

とおくと，X_2 は空でない集合となる．また X_1 はコンパクトで凸集合でもある．さらに X_2 上で定義され，X_2 に値をとる連続でアフィン写像の可換な族 $\{T_y : y \in E\}$ を

$$(T_y f)(x) = f(x+y) - f(y) \qquad (\forall f \in X_2, \forall x \in E)$$

で考えると，再び Markov–角谷の不動点定理から，

$$f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y) \qquad (\forall x, y \in E)$$

となるような $f_2 \in X_2$ が存在する．ここでまた，

$$X_3 = \{f \in X_2 : f(x+y) = f(x) + f(y) \ (\forall x, y \in E)\}$$

とおくならば，X_3 は空でないコンパクトな凸集合となる．X_3 上で定義され，X_3 に値をとる連続でアフィンな写像の可換な族 $\{S_\mu : \mu > 0\}$ を

$$(S_\mu f)(x) = \frac{f(\mu x)}{\mu} \qquad (\forall f \in X_3, \ \forall x \in E)$$

で定義すると，Markov–角谷の不動点定理から

$$f_3(\mu x) = \mu f_3(x) \qquad (\forall \mu > 0)$$

となる $f_3 \in X_3$ が存在する．これは f_3 が線形であることを意味する．▨

$\boldsymbol{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし，

$$S_n = \left\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) : \alpha_i \geqq 0 \ (i=1, 2, \cdots, n), \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right\}$$

とする．このとき，S_n の元 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$ が **dyadic** であるとは，各 i に対して，δ_i が

$$\delta_i = \frac{k}{2^m} \qquad (\text{ただし，} k = 0, 1, 2, \cdots, 2^m;\ m = 1, 2, \cdots)$$

の形のときをいう．また，

$$T_n = \{\delta \in S_n : \delta \text{ は dyadic}\}$$

とする．この記法で Fan のシステム定理(定理 5.3.1)はつぎのような無限個の関数の族にまで拡張できる．

定理 5.4.2 (Fan のシステム定理)　X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，$\{f_\nu : \nu \in I\}$ を X 上で定義され，$(-\infty, \infty)$ に値をとる下半連続で

凸な関数の族とする．このとき，つぎの条件（１），（２），（３）は同値である．

（１）　凸不等式のシステム

$$f_\nu(x)\leqq 0 \qquad (^\forall\nu\in I)$$

の解が存在する；

（２）　任意の $n\in N$ と，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdot,\alpha_n)\in S_n$，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{\nu_i}(x)\leqq 0$$

となる $x\in X$ が存在する；

（３）　任意の $n\in N$ と，$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \delta_i f_{\nu_i}(x)\leqq 0$$

となる $x\in X$ が存在する．

証明　（１）⟺（２）は定理 5.3.1 と X のコンパクト性を用いれば明らかである．また（２）⟹（３）は明らか．（３）⟹（２）は T_n が S_n で稠密なことを使えばよい．▨

いまや Mazur–Orlicz の定理を証明することができる．

定理 5.4.3 (Mazur–Orlicz の定理)　p を線形空間 E の sublinear な関数とする．$\{x_\nu\colon \nu\in I\}$ を E の元からなる族とし，$\{\alpha_\nu\colon \nu\in I\}$ をそれに対応する実数の族とする．このとき，つぎの（１），（２）の命題は同値である．

（１）
$$f(x)\leqq p(x) \qquad (x\in E),$$
$$\alpha_\nu\leqq f(x_\nu) \qquad (\nu\in I)$$

となる $f\in E'$ が存在する；

（２）　任意の $n\in N$ と，$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \delta_i\alpha_{\nu_i}\leqq p\left(\sum_{i=1}^n \delta_i x_{\nu_i}\right)$$

がつねに成り立つ．

証明　（１）⟹（２）は容易にわかるから，（２）⟹（１）を証明する．F を直積空間 $\boldsymbol{R}^E$ とすると，F は線形位相空間になる．

$$X_0=\prod_{x\in E}[-p(-x),p(x)]$$

とすると，X_0 は F のコンパクトな凸集合である．また，

$$B=\{g\in E'\colon\ g(x)\leqq p(x)\ \ (^\forall x\in E)\}$$

とすると，補助定理 5.4.1 によって，B は空でないコンパクトな凸集合である．任意の $\nu\in I$ に対して，B 上の実数値関数 F_ν を

$$F_\nu(f)=\alpha_\nu-f(x_\nu) \qquad ({}^\forall f\in B)$$

で定義すると，F_ν は連続なアフィン関数となる．任意の $n\in N$ と，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$，$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$ に対して，不等式

$$\min_{f\in B}\sum_{i=1}^{n}\delta_i F_{\nu_i}(f)\leqq 0$$

がいえるならば，Fan のシステム定理(定理 5.4.2)によって結論が導かれるのであるが，それは補助定理 5.4.1 を使えば

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\alpha_{\nu_i}&\leqq p\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\right)\\&\leqq\max_{f\in B} f\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\right)\\&=\max_{f\in B}\sum_{i=1}^{n}\delta_i f(x_{\nu_i})\end{aligned}$$

となることからわかる．▨

C を線形空間 E の空でない集合とする．C の任意の 2 つの元 x,y に対して，つねに $\frac{1}{2}(x+y)\in C$ であるとき，C は **midconvex** であるといわれる．また，midconvex 集合 C 上の実数値関数 f が，任意の $x,y\in C$ に対して

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\geqq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

を満たすとき **midconcave 関数**であるといわれる．

定理 5.4.4　p を線形空間 E 上の sublinear な関数であるとする．C を E の midconvex な集合とし，f_0 を C 上の midconcave 関数で，

$$f_0(x)\leqq p(x) \qquad (x\in C)$$

を満たすとする．このとき，

$$f_0(x)\leqq f(x) \qquad (x\in C),$$
$$f(y)\leqq p(y) \qquad (y\in E)$$

となるような $f\in E'$ が存在する．

証明　C の元 x_ν 全体からなる族を $\{x_\nu\colon \nu\in I\}$ とし，x_ν における f_0 の値を α_ν とする．すなわち，$\alpha_\nu=f_0(x_\nu)$ とする．すると Mazur–Orlicz の定理から，もし任意の $n\in N$ と，$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\alpha_{\nu_i}\leqq p\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\right)$$

がいえれば，命題の結論はいえるが，それは

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\alpha_{\nu_i}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_0(x_{\nu_i})$$

$$\leqq f_0\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\right)$$

$$\leqq p\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\right)$$

となることからいえる. ▨

この定理の直接的な結果として，つぎの Hahn–Banach の定理が得られる.

定理 5.4.5 (Hahn–Banach の定理)　p を線形空間 E の sublinear な関数とする. L を E の線形部分空間とし，f_0 を L' の元で,

$$f_0(x)\leqq p(x) \qquad (x\in L)$$

を満たすものとする. このとき,

$$f(x)=f_0(x) \qquad (x\in L),$$

$$f(y)\leqq p(y) \qquad (y\in E)$$

となるような $f\in E'$ が存在する.

注　この定理において，E をノルム空間，f_0 を L 上の連続線形汎関数，$p(x)=\|f_0\|\|x\|$ とする. このとき，$p(x)$ は E 上で sublinear な関数であり,

$$f_0(x)\leqq\|f_0\|\|x\|=p(x) \qquad (x\in L)$$

である. よって定理が使えて，$f(x)=f_0(x)$ $(x\in L)$，$f(y)\leqq p(y)$ $(y\in E)$ となるような $f\in E^*$ が存在する. $f(y)\leqq p(y)$ $(y\in E)$ は $\|f\|=\|f_0\|$ を意味するから，定理 5.4.5 は定理 1.2.2 の拡張になっていることがわかる.

この節の最後に，Mazur–Orlicz の定理を用いて，König の定理を証明してみよう.

p を線形空間 E の sublinear な関数であるとし，T を E の部分集合とする. 任意の $u, v\in T$ に対して,

$$p\left(x-\frac{u+v}{2}\right)\leqq 0$$

となるような $x\in T$ がつねにとれるとき，T は ***p*-midconvex** であるといわれる.

定理 5.4.6　E を線形空間とする. p を E 上の sublinear な関数とし，T を E の p-midconvex 集合とする. このとき,

$$\inf_{x\in T} p(x)=\max_{f\leqq p}\inf_{x\in T} f(x)$$

がつねに成立する.

証明　$\inf_{x\in T} p(x)=-\infty$ のとき命題は明らかなので，$\inf_{x\in T} p(x)>-\infty$ を仮定する. T のすべての元 x_ν からなる集合を $\{x_\nu:\ \nu\in I\}$ とし,

$$\alpha_\nu=\inf_{x\in T} p(x) \qquad (\forall\nu\in I)$$

とする．このとき，仮定から任意の $n\in\boldsymbol{N}$ と，$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$ に対して

$$p\Big(y_0-\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\Big)\leqq 0$$

となるような $y_0\in T$ が存在する．よって，

$$\begin{aligned}p\Big(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\Big)&\geqq p\Big(y_0-\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\Big)+p\Big(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\Big)\\&\geqq p(y_0)\geqq\inf_{x\in T}p(x)\end{aligned}$$

となる．Mazur-Orlicz の定理より，すべての $x\in E$ に対して $f(x)\leqq p(x)$ であり，かつ

$$f(y)\geqq\inf_{x\in T}p(x)\qquad({}^\forall y\in T)$$

となるような $f\in E'$ が存在する．

$$\prod_{x\in E}[-p(-x),p(x)]$$

がコンパクトであるから，$\max\limits_{f\leqq p}\inf\limits_{x\in T}f(x)\geqq\inf\limits_{x\in T}p(x)$ が成り立つ．一方

$$\max_{f\leqq p}\inf_{x\in T}f(x)\leqq\inf_{x\in T}p(x)$$

が成り立つことは明らかである． ▨

問 題 5.4

1. E をノルム空間，$\{x_\nu:\nu\in I\}$ を E の元のある族，$\{\alpha_\nu:\nu\in I\}$ をそれに対応する実数の族とする．このとき，$\rho\geqq 0$ に対してつぎの命題は同値である．これを示せ．

（1） 任意の $\nu\in I$ に対して，$f(x_\nu)\geqq\alpha_\nu$ を満たし，$\|f\|\leqq\rho$ となるような連続線形汎関数 $f\in E^*$ が存在する．

（2） 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ と，任意の $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$，$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$ に対して，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\alpha_{\nu_i}\leqq\rho\left\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_{\nu_i}\right\|$$

がつねに成り立つ．

2. Fan のシステム定理（定理 5.4.2）を使って，局所凸線形位相空間 E における Markov-角谷の不動点定理を証明せよ．

5.5　分離定理，最短距離定理

この節では，まず初めに，König の定理を用いて，分離定理と最短距離に関する定理の拡張定理を得ている．そのあと，Fan のシステム定理を下半連続関数が $(-\infty,\infty]$ に値をとるような場合まで拡張している．

p を線形空間 E の sublinear な関数とし，A, B を E の空でない部分集合とする．このとき，p による A と B の**距離**

$$p(A, B)=\inf\{p(x-y):\ x\in A,\ y\in B\}$$

を考えよう．

定理 5.5.1（分離定理）　p を線形空間 E の sublinear な関数とし，C と D を E の空でない部分集合で，その差 $C-D$ が p-midconvex 集合であり，しかも $p(C, D)>-\infty$ となるものとする．このとき，

$$\inf\{f(x):\ x\in C\}=p(C, D)+\sup\{f(y):\ y\in D\},$$
$$f(x)\leqq p(x)\qquad (x\in E)$$

を満たすような $f\in E'$ が存在する．

証明　$T=C-D$ とすると，T は p-midconvex 集合であるから，König の定理によって，

$$f(x)\leqq p(x)\qquad (x\in E),$$
$$f(y-z)\geqq p(C, D)\qquad (y\in C, z\in D)\qquad (*)$$

となるような $f\in E'$ が存在する．(*) は

$$f(y)\geqq p(C, D)+f(z)\qquad (y\in C, z\in D)$$

となる．よって，

$$\inf_{y\in C} f(y)\geqq p(C, D)+\sup_{z\in D} f(z)$$

である．だから

$$\begin{aligned}p(C, D)&\leqq\inf_{y\in C} f(y)-\sup_{z\in D} f(z)\\&\leqq\inf\{f(y-z):\ y\in C, z\in D\}\\&\leqq\inf\{p(y-z):\ y\in C, z\in D\}\\&=p(C, D)\end{aligned}$$

となり，$\inf\{f(y):\ y\in C\}=p(C, D)+\sup\{f(z):\ z\in D\}$ が証明された．▨

E をノルム空間とし，C, D を凸集合とすると，この定理はつぎのようになる．

定理 5.5.2 C, D をノルム空間 E の空でない凸集合とし，$d(C, D)>0$ とする．このとき，

$$\inf\{f(x):\ x\in C\}=d(C, D)+\sup\{f(y):\ y\in D\}$$

であり，しかも $\|f\|=1$ となるような $f\in E^*$ が存在する．ただし，

$$d(C, D)=\inf\{\|x-y\|:\ x\in C, y\in D\}.$$

証明 $C-D$ は凸集合だから，それは p-midconvex 集合である．定理 5.5.1 より

$$\inf\{f(x):\ x\in C\}=d(C, D)+\sup\{f(y):\ y\in D\},$$
$$f(x)\leqq\|x\| \qquad (^\forall x\in E)$$

となるような $f\in E'$ が存在する．だから，

$$\begin{aligned} d(C, D)&=\inf_{x\in C} f(x)-\sup_{y\in D} f(y)\\ &\leqq\inf\{f(x-y):\ x\in C,\ y\in D\}\\ &\leqq\inf\{\|f\|\|x-y\|:\ x\in C,\ y\in D\}\\ &=\|f\|d(C, D)\end{aligned}$$

である．$d(C, D)>0$ なので，$\|f\|\geqq 1$ となる．一方 $f(x)\leqq\|x\|$ $(x\in E)$ より $\|f\|\leqq 1$ である．よって $\|f\|=1$ である． ▨

つぎに，最短距離定理(定理 2.1.2)の拡張定理を得てみよう．

定理 5.5.3 E を線形空間とする．p: $E\to\boldsymbol{R}$ を sublinear とし，K を E の空でない p-midconvex 集合とする．このとき，$x\in E$ と $x_0\in K$ に対して，つぎの命題は同値である．

(1) $p(x_0-x)=\inf\{p(z-x):\ z\in K\}$ である；

(2) $f(y)\leqq p(y)$ $(y\in E)$, $\inf\{f(y-x):\ y\in K\}=p(x_0-x)$

を満たすような $f\in E'$ が存在する；

(3) $\inf\{f(y):\ y\in K\}=f(x_0)$, $f(x_0-x)=p(x_0-x)$,
$f(y)\leqq p(y)$ $\qquad (y\in E)$

を満たすような $f\in E'$ が存在する．

証明 (1)$\Longrightarrow$(2)：$T=\{y-x:\ y\in K\}$ とする．このとき，König の定理より，すべての $y\in E$ に対して，$f(y)\leqq p(y)$ であり，かつ

$$\inf\{f(y-x):\ y\in K\}=p(x_0-x)$$

であるような $f\in E'$ が存在する．

(2)$\Longrightarrow$(3)：(2) の前半の仮定より，$f(x_0-x)\leqq p(x_0-x)$ となる．また (2) の後半の仮定より，$f(x_0-x)=p(x_0-x)$ である．さらに，

$$\inf\{f(y):\ y\in K\}=f(x_0)$$

であることは，

$$f(y-x_0)=f(y-x)+f(x-x_0)$$
$$\geqq p(x_0-x)-p(x_0-x)=0 \qquad (\forall y\in K)$$

より明らかである．

(3)⟹(1)：任意の $z\in K$ に対して，

$$p(x_0-x)=f(x_0-x)\leqq f(z-x)\leqq p(z-x)$$

である．よって，

$$p(x_0-x)=\inf\{p(z-x):\ z\in K\}.$$

▨

この定理の直接的な結果として，つぎの定理が証明できる．

定理 5.5.4 Kをノルム空間Eの凸集合とし，$x\in E$, $x_0\in K$とする．このとき，つぎの条件は同値である．

(1) $\|x-x_0\|=\inf\{\|x-y\|:\ y\in K\}$ である；

(2) $$\inf\{L(y-x):\ y\in K\}=\|x_0-x\|, \quad \|L\|=1$$
を満たすようなE上の線形連続汎関数Lが存在する；

(3) $\|L\|=1$, $\inf\{L(y):\ y\in K\}=L(x_0)$, $L(x_0-x)=\|x_0-x\|$
を満たすようなE上の線形連続汎関数Lが存在する．

Fan のシステム定理(定理 5.3.1，定理 5.4.2)はこれまでの議論からもわかるように非常に有用な定理である．そこで，Fan の定理の中に現われる関数を，$(-\infty,\infty]$ に値をとるような関数にまで拡張することを試みよう．実際，$\{f_\alpha\}$ が連続な凸関数の族で $(-\infty,\infty)$ に値をとるような場合であっても，

$$g(x)=\sup_\alpha f_\alpha(x)$$

で定義される下半連続な凸関数gは $(-\infty,\infty]$ に値をとることがあるからである．

まずつぎの補助定理から証明しよう．

補助定理 5.5.5 XとYを位相空間とする．βをXから $[0,\infty)$ への連続関数とし，fをYから $(-\infty,\infty]$ への下半連続な関数とする．このとき，

$$(\beta\cdot f)(x,y)=\beta(x)f(y) \qquad (\forall x\in X,\ \forall y\in Y)$$

で定義される$X\times Y$上の関数$\beta\cdot f$は下半連続である．

証明 $a\in\boldsymbol{R}$とする．このとき，

$$A=\{(x,y)\in X\times Y:\ \beta(x)f(y)>a\}$$

が$X\times Y$で開集合であることを示せば十分である．$(x_0,y_0)\in A$としよう．まず，$\beta(x_0)>0$のときは，

$$\beta(x_0)>\varepsilon,$$

$$(\beta(x_0)-\varepsilon)f(y_0)>a,$$
$$(\beta(x_0)+\varepsilon)f(y_0)>a$$

となるような $\varepsilon>0$ がとれる．いま，

$$U=\{x\in X:\ |\beta(x)-\beta(x_0)|<\varepsilon\}\times\left\{y\in Y:\ f(y)>\max\left[\frac{a}{\beta(x_0)+\varepsilon},\ \frac{a}{\beta(x_0)-\varepsilon}\right]\right\}$$

とおくと，U は開集合で，しかも $(x_0,y_0)\in U\subset A$ である．実際，$(x,y)\in U$ とすると，$a\geqq 0$ のときは

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\beta(x_0)-\varepsilon}\geqq a$$

となり，$(x,y)\in A$ である．$a<0$ のときは，

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\beta(x_0)+\varepsilon}>a$$

となり，$(x,y)\in A$ である．つぎに $\beta(x_0)=0$ としよう．このとき $a<0$ なので $\delta f(y_0)>a$ となるような $\delta>0$ が存在する．そこで

$$V=\{x\in X:\ 0\leqq\beta(x)<\delta\}\times\left\{y\in Y:\ f(y)>\frac{a}{\delta}\right\}$$

とおけば，V は開集合であり，$(x_0,y_0)\in V\subset A$ である．実際，もし $(x,y)\in V$ ならば

$$\beta(x)f(y)>\beta(x)\frac{a}{\delta}>a$$

となり，$(x,y)\in A$ である．これで補助定理は証明された． ▨

定理 5.5.6 X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とする．$f_1,f_2,\cdots,f_n$ を X から $(-\infty,\infty]$ に値をとる下半連続で凸な関数とする．このとき，つぎの命題は同値である．

（1） 凸不等式のシステム

$$f_i(x)\leqq 0\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

が X 上で解をもつ;

（2） $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in S_n$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\leqq 0$$

となる $y\in X$ が存在する．

証明 （1）が（2）を意味することは明らかである．（2）$\Longrightarrow$（1）を証明しよう．

$$A=\bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X\colon f_i(x)<\infty\}$$

とする．$\alpha_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とすると，（2）から $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\leqq 0$ となる $x\in X$ が存在する．これは $x\in A$ を意味する．だから A は空でない．まず，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in S_n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\leqq 0$$

となる $x\in A$ が存在することを示す．ここで，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m>0$ で，$\alpha_{m+1}=\cdots=\alpha_n=0$ を仮定しても一般性を失わない．$m=n$ ならば，（2）から $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\leqq 0$ となる $x\in A$ がとれるので，上のことは証明されたことになる．そこで $1\leqq m<n$ としよう．$0<t<1$ となる t に対して，（2）から

$$\sum_{i=1}^{m}t\alpha_i f_i(x_t)+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1-t}{n-m}f_i(x_t)\leqq 0 \tag{*}$$

となるような $x_t\in A$ がとれる．$0<t<1$ となるある t に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_t)\leqq 0$$

ならば，上のことは証明されたことになるので，すべての t $(0<t<1)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_t)>0$$

であると仮定できる．$\alpha_{m+1}=\cdots=\alpha_n=0$ であるので，

$$\sum_{i=1}^{m}t\alpha_i f_i(x_t)>0. \tag{**}$$

よって，(*), (**) から

$$\sum_{i=m+1}^{n}f_i(x_t)\leqq 0. \tag{***}$$

X はコンパクトだから，$\{x_t\}$ の部分ネット $\{x_{t_r}\}$ で，$t_r\to 1$，$x_{t_r}\to x_0\in X$ となるものが存在する．(*), (***) と補助定理 5.5.5 を用いると

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x_0)\leqq\liminf_r\left(\sum_{i=1}^{m}t_r\alpha_i f_i(x_{t_r})+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1-t_r}{n-m}f_i(x_{t_r})\right)\leqq 0,$$

$$\sum_{i=m+1}^{n}f_i(x_0)\leqq\liminf_r\sum_{i=m+1}^{n}f_i(x_{t_r})\leqq 0$$

を得る．上の 2 つの式から $x_0\in A$ であり

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)\leqq 0$$

である，高橋のシステム定理(定理 5.3.4)より

$$\inf_{x\in X}\max_i f_i(x)\leqq\inf_{x\in A}\max_i f_i(x)\leqq 0.$$

X はコンパクトであり，$\max_i f_i(x)$ は下半連続であるから，

$$\max_i f_i(x_0)\leqq 0$$

となる $x_0\in X$ が存在する．ゆえに，

$$f_i(x_0)\leqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

となる． ▨

この定理を用いて，つぎの定理も得られる．

定理 5.5.7 X は線形位相空間 E の空でないコンパクトな凸集合とする．$\{f_\nu\colon \nu\in I\}$ を X から $(-\infty,\infty]$ に値をとる下半連続で凸な関数の族とする．このとき，つぎの命題は同値である．

(1) 凸不等式のシステム

$$f_\nu(x)\leqq 0 \qquad (\nu\in I)$$

が X 上で解をもつ;

(2) 任意の $n\in N$ と，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in S_n$，$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\in I$ に対して

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{\nu_i}(x)\leqq 0$$

となる $x\in X$ が存在する．

問 題 5.5

1. K をノルム空間 E の凸集合とし，$x\in E$, $x_0\in K$ とする．このとき，つぎの条件は同値である．これを定理 5.5.4 を用いて示せ．

(1) $\|x-x_0\|=\inf\{\|x-y\|\colon y\in K\}$ である;

(2) $(x_0-y,j)\geqq 0$ $({}^\forall y\in K)$ となる $j\in J(x-x_0)$ が存在する．ただし J は E 上の双対写像である．

2. E を (s) なる Banach 空間とし，C を E の凸集合とする．また $C_0\subset C$ とし，P を C から C_0 の上への sunny nonexpansive retraction とする．このとき，任意の $x\in C$ と $y\in C_0$ に対して，

$$(x-Px, J(Px-y))\geqq 0$$

がつねに成り立つ．これを示せ．

注 補助定理 4.1.6 を参照せよ．

3. C, D をノルム空間 E の空でない凸集合とし，$C\cap D=\phi$ とする．また，C を閉集合，D をコンパクト集合とする．このとき，$d(C,D)>0$ である．これを示せ．

6

不動点理論の応用

この章では，不動点定理や Fan のシステム定理，minimax 定理などを変分不等式や相補性の問題，ゲームの core の問題，最小ノルム問題などへ応用を試みる．また Schauder の 不動点定理を用いてソ連の高校生 Lomonosov が解いたコンパクト作用素に対する不変部分空間に関する定理も興味があるので紹介しておこう．不動点定理が非線形の問題ばかりでなく，線形の場合でも強力な武器となることを知ってもらいたい．

6.1 変分不等式と相補性問題

X を局所凸な線形位相空間 E の閉で凸な集合とし，T を X から E^* への写像とする．このとき，

$$(y-x,\ Tx) \geqq 0 \qquad (^\forall y \in X)$$

を満たす X の元 x を**変分不等式の解**という．また X を閉な凸錐とし，X^* を X の **polar**，すなわち

$$X^* = \{y \in E^* \colon\ (x, y) \geqq 0\ \ (^\forall x \in X)\}$$

とするとき，X から E^* への写像 T に対して

$$Tx \in X^*, \qquad (x,\ Tx) = 0$$

を満たす X の元 x を**相補性問題の解**という．特に $E = E^* = \boldsymbol{R}^n$,

$$X = \boldsymbol{R}_+{}^n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \colon\ x_i \geqq 0\ \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

とするとき，上の式は

$$x \in \boldsymbol{R}_+{}^n, \quad Tx \in \boldsymbol{R}_+{}^n, \quad (x,\ Tx) = 0$$

となって，よく知られた相補性問題の形になっている．このような問題は数理

計画やゲームの理論，経済均衡論などにおいてしばしば現われるものであるが，数学的にも非常に興味のある問題である．

変分不等式の解と相補性問題の解との間にはつぎの関係がある．

補助定理 6.1.1（変分不等式の解と相補性問題の解の関係） Xを局所凸な線形位相空間Eの閉な凸錐とし，X^*をそのpolarとする．TをXからE^*への写像とするとき，相補性問題の解の集合

$$\{x\in X:\ Tx\in X^*,\ (x, Tx)=0\}$$

と変分不等式の解の集合

$$\{x\in X:\ (u-x, Tx)\geqq 0\ (\forall u\in X)\}$$

は等しい．

証明 xを相補性問題の解とする．このとき，すべての$u\in X$に対して

$$\begin{aligned}(u-x, Tx)&=(u, Tx)-(x, Tx)\\&=(u, Tx)\geqq 0\end{aligned}$$

なので，xは変分不等式の解になる．

逆に，xを変分不等式の解としよう．このとき，

$$(u-x, Tx)\geqq 0 \qquad (\forall u\in X)$$

なので，特に$u=0$のときと$u=\lambda x$ $(\lambda>1)$ のときを考えれば，$(x, Tx)=0$を得る．証明を完了するためには，$Tx\in X^*$を示せばよいが，$Tx\notin X^*$とすると，$(u_0, Tx)<0$となる$u_0\in X$が存在する．このとき，$(u_0-x, Tx)\geqq 0$ より，

$$0>(u_0, Tx)\geqq(x, Tx)=0$$

となり，これは矛盾である． ▨

定理5.1.8を用いて，コンパクト集合上での拡張された変分不等式に関する定理を証明する．なお，記述を簡単にするために，$E=\boldsymbol{R}^n$とする．

定理 6.1.2 Xをn次元ユークリッド空間$\boldsymbol{R}^n$のコンパクトで凸な集合とする．TをXから$\boldsymbol{R}^n$への連続写像とし，fをXから$(-\infty,\infty]$への下半連続で凸な関数とする．このとき，

$$(x-x_0, Tx_0)+f(x)\geqq f(x_0) \qquad (\forall x\in X)$$

となる$x_0\in X$が存在する．

証明 いま

$$A=\{(x,y)\in X\times X:\ (y-x, Tx)+f(y)\geqq f(x)\}$$

とすると，$A\subset X\times X$は定理5.1.8の条件をすべて満たしているので，$x_0\times X\subset A$となる$x_0\in X$の存在がわかる．すなわち，

$$(x-x_0, Tx_0)+f(x)\geqq f(x_0) \qquad (\forall x\in X)$$

となるような $x_0 \in X$ が存在する.　▨

この定理を X が閉で凸な場合に拡張しよう．その前に定義を与えておく．C と X を $\boldsymbol{R}^n$ の閉部分集合としよう．このとき，$z \in \partial_C X$ であるとは，$z \in X$ であり，さらに z の任意の近傍 $U(z)$ に対して

$$U(z) \cap (C-X) \neq \phi$$

となるときをいう．$z \in i_C X$ であるとは，$z \in X$ であって，さらに z のある近傍 $U(z)$ に対して，

$$U(z) \cap (C-X) = \phi$$

となるときをいう．$\partial_C X$ は C に関する X の**境界**といい，$i_C X$ を C に関する X の**開核**という．

定理 6.1.3（変分不等式に関する定理）　C をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の閉凸集合とする．T を C から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像とし，f を C から $(-\infty, \infty]$ への下半連続な凸関数とする．このとき，もし C のコンパクトで凸な部分集合 X が存在して，$z \in \partial_C X$ に対して

$$(y_0 - z,\ Tz) + f(y_0) \leqq f(z)$$

となるような $y_0 \in i_C X$ が存在するならば

$$(x - x_0,\ Tx_0) + f(x) \geqq f(x_0) \qquad (^\forall x \in C)$$

となるような $x_0 \in C$ が存在する.

証明　定理 6.1.2 より

$$(y - x_0,\ Tx_0) + f(y) \geqq f(x_0) \qquad (^\forall y \in X) \qquad (*)$$

となるような $x_0 \in X$ が存在する．もし，$x_0 \in i_C X$ ならば，$x \in C$ に対して

$$y = \lambda x + (1-\lambda) x_0 \in X$$

となるような λ $(0<\lambda<1)$ があるから

$$f(x_0) \leqq f(\lambda x + (1-\lambda) x_0) + \lambda (x - x_0,\ Tx_0)$$

となり，f が凸関数であることを使うと

$$\lambda f(x_0) \leqq \lambda f(x) + \lambda (x - x_0,\ Tx_0)$$

を得る．それゆえ，$\lambda > 0$ で割ると

$$f(x_0) \leqq f(x) + (x - x_0,\ Tx_0)$$

が成り立つ．$x_0 \in \partial_C X$ とすると，仮定より

$$(x_0 - y_0,\ Tx_0) + f(x_0) \geqq f(y_0)$$

となるような $y_0 \in i_C X$ が存在する．また，

$$(y - x_0,\ Tx_0) + f(y) \geqq f(x_0) \qquad (^\forall y \in X)$$

であるので，

$$(y-y_0, Tx_0)+f(y)\geqq f(y_0) \qquad (^\forall y\in X)$$

を得る．$y_0\in i_C X$ であるので，$x\in C$ に対して $y=\lambda x+(1-\lambda)y_0\in X$ となるような λ $(0<\lambda<1)$ が存在するので，前の議論と同様に，

$$f(y_0)\leqq f(x)+(x-y_0, Tx_0)$$

を得る．また $y_0\in X$ なので (*) より

$$f(x_0)\leqq f(y_0)+(y_0-x_0, Tx_0)$$

を得る．上の2つの式を加えると

$$f(x_0)\leqq f(x)+(x-x_0, Tx_0)$$

となり，定理の証明は完了する． ▨

この定理と補助定理6.1.1を用いると，つぎの相補性問題に関する定理が得られる．

定理 6.1.4 (相補性問題に関する定理) C をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の閉な凸錐とし，T を C から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像とする．このとき，C のコンパクトで凸な集合 X が存在して，$z\in\partial_C X$ に対して

$$(z-y_0, Tz)\geqq 0$$

となるような $y_0\in i_C X$ が存在するならば

$$Tx_0\in C^*, \qquad (x_0, Tx_0)=0$$

となるような $x_0\in C$ が存在する．

これを用いると Karamardian によって得られていたつぎの定理が証明できる．

系 6.1.5 (Karamardian の定理) C をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の閉な凸錐とし，T を C から $\boldsymbol{R}^n$ への連続写像とする．すべての $x\in C$ に対して

$$(x, Tx-T0)\geqq c\|x\|^2$$

となる $c>0$ が存在するものとする．このとき，

$$Tx_0\in C^*, \qquad (x_0, Tx_0)=0$$

となるような $x_0\in C$ が存在する．

証明 $T0=0$ のときは $x_0=0$ とすればよい．だから $T0\neq 0$ と仮定する．

$$X=\left\{x\in C\colon \|x\|\leqq\frac{\|T0\|}{c}\right\}$$

とすると，X はコンパクトな凸集合であり，$x\in\partial_C X$ に対し

$$c\|x\|^2=\|x\|\|T0\|$$

となる．それゆえ，$x\in\partial_C X$ ならば仮定より

$$(x, Tx-T0)\geqq c\|x\|^2=\|x\|\|T0\|$$

となり，Schwarz の不等式を用いると

$$(x, Tx) \geqq (x, T0) + \|x\|\|T0\| \geqq -\|x\|\|T0\| + \|x\|\|T0\| = 0$$

を得る．これは定理 6.1.4 において，$y_0=0$ となった場合である．それゆえ，

$$Tx_0 \in C^*, \qquad (x_0, Tx_0)=0$$

となるような $x_0 \in C$ が存在する． ▨

つぎに，monotone タイプの変分不等式に関して少々論じておこう．定理の証明にあたっては，多価写像の不動点定理(定理 5.1.5)が用いられる．

X を線形位相空間 E の凸集合とし，E^* は E の共役空間とする．X から E^* への写像 T が **monotone** であるとは

$$(x-y, Tx-Ty) \geqq 0 \qquad (\forall x, y \in X)$$

を満たすときをいう．また，$T: X \to E^*$ が **hemicontinuous** であるとは，任意の $u, v \in X$ に対して，$[0,1]$ から E^* への写像

$$t \mapsto T(tv+(1-t)u)$$

がつねに連続であるときをいう．ただし，E^* の位相は弱*位相である．

定理 6.1.6 X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，T を X から E^* への monotone 写像とする．このとき，

$$(x-x_0, Tx) \geqq 0 \qquad (\forall x \in X)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

証明 任意の $y \in X$ に対して，集合

$$\{x \in X\colon (x-y, Tx) < 0\}$$

は空でないと仮定しよう．そして X から X への多価写像 A と B を

$$Ax = \{y \in X\colon (x-y, Ty) < 0\},$$
$$Bx = \{y \in X\colon (x-y, Tx) < 0\}$$

で定義しよう．すると，

$$A^{-1}y = \{x \in X\colon (x-y, Ty) < 0\}$$

であるから，$A^{-1}y$ は凸集合である．また，上の仮定より

$$B^{-1}y = \{x \in X\colon (x-y, Tx) < 0\}$$

は空でない集合である．T は monotone であるから，すべての $x, y \in X$ に対し

$$(x-y, Tx) \geqq (x-y, Ty)$$

である．よって，

$$Bx \subset Ax \qquad (\forall x \in X)$$

である．Bx が開集合であることは明らかなので，定理 5.1.5 を使うと

$$x_0 \in Ax_0$$

となる $x_0 \in X$ の存在が証明できる．これは $0=(x_0-x_0, Tx_0)<0$ を意味するので，矛盾である．よって結論が証明できた． ▨

補助定理 6.1.7 X を線形位相空間 E の凸集合とし，T を X から E^* への hemicontinuous 写像とする．このとき，$x_0 \in X$ が

$$(x-x_0, Tx) \geqq 0 \qquad (\forall x \in X)$$

を満たすならば

$$(x-x_0, Tx_0) \geqq 0 \qquad (\forall x \in X)$$

をも満たす．

証明

$$(x-x_0, Tx) \geqq 0 \qquad (\forall x \in X)$$

とし，y を X の任意の元とする．X は凸集合なので，$0<t<1$ となるすべての実数 t に対して

$$y_t = (1-t)x_0 + ty \in X$$

となる．そこで

$$0 \leqq (t(y-x_0), Ty_t) = t(y-x_0, Ty_t)$$

を得る．$t>0$ なので，$(y-x_0, Ty_t) \geqq 0$ である．いま $t \to 0$ とすると，仮定から T は hemicontinuous であるから，$(y-x_0, Tx_0) \geqq 0$ を得る． ▨

この補助定理と定理 6.1.6 を使えばよく知られた変分不等式に関するつぎの定理が得られる．

定理 6.1.8 X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，T を X から E^* への monotone で hemicontinuous な写像とする．このとき，

$$(x-x_0, Tx_0) \geqq 0 \qquad (\forall x \in X)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

問 題 6.1

1. H を Hilbert 空間とする．X を H の有界閉凸集合とし，T を X から X への nonexpansive 写像とする．このとき，$F(T) \neq \phi$ であることを，$I-T$ が monotone 写像であることを使って証明せよ．

2. X を線形位相空間 E の凸集合とし，T を X から E^* への monotone 写像とする．また $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ とする．このとき，

$$\inf_{y \in X} \max_i (y-x_i, Tx_i) \leqq 0$$

であることを示せ．

3. 2 を用いて，定理 6.1.6 を証明せよ．

6.2　ゲームの core

この節では，線形不等式に関する命題(問題 5.4.1)を使って，種々のゲームの core を論じてみる．

P を空でない集合とし，Σ を P の部分集合からなる field とする．Σ 上で定義され，非負の値をとる関数 v が $v(\phi)=0$ を満たすならば，v は**ゲーム**であるといわれる．

$B(P)$ を前と同様 P 上の有界実数値関数の全体からなる Banach 空間とし，そのノルムを

$$\|f\|=\sup_{t\in P}|f(t)|$$

とする．$C(P,\Sigma)$ を Σ-可測な特性関数の有限個の線形結合

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\qquad (\text{ただし，}\alpha_i\text{ はスカラーである})$$

の全体とし，$B(P)$ における $C(P,\Sigma)$ の閉包(Banach 空間になる)を $B(P,\Sigma)$ とする．$ba(P,\Sigma)$ を Σ 上で定義された有界な加法的測度の全体とし，そのノルムを

$$\|\mu\|=\sup\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)|$$

で与えると Banach 空間になる．ただし，$\{E_i\}_{i=1}^{n}$ は Σ の中の互いに共通部分をもたない有限個の集合族である．

このとき，$B(P,\Sigma)$ の共役空間 $B^*(P,\Sigma)$ は $ba(P,\Sigma)$ と同形になることがよく知られている．

ゲーム v: $\Sigma\to R^+=[0,\infty)$ の **outcome** とは

$$\mu(S)\geqq v(S)\qquad (^\forall S\in\Sigma),$$
$$\mu(P)=v(P)$$

となるような $\mu\in ba(P,\Sigma)$ のことである．ゲームの outcome の全体をゲーム v の **core** とよび，$\mathcal{C}(v)$ で表す．

v: $\Sigma\to \boldsymbol{R}^+$ をゲームとし，T を P から P への写像で，$S\in\Sigma$ のとき，$T^{-1}S\in\Sigma$ を満たすものとする．このとき，ゲーム v の $\boldsymbol{T}$**-core** を

$$\mathcal{C}_T(v)=\{\mu\in\mathcal{C}(v):\ \mu T^{-1}=\mu\}$$

で定義する．

定理 6.2.1　v: $\Sigma\to\boldsymbol{R}^+$ をゲームとし，T を P から P への写像で，$S\in\Sigma$

のとき，$T^{-1}S\in\Sigma$ を満たすものとする．このとき，つぎの（1），（2），（3）の条件は同値である．

（1）　$\mathcal{C}_T(v)\neq\phi$;

（2）
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j(1_{S_j}-1_{T^{-1}S_j})\leqq 1_P \qquad (*)$$
となるような $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqq 0$, $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\Sigma$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\in\boldsymbol{R}$, $S_1,S_2,\cdots,S_m\in\Sigma$ に対して，
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)\leqq v(P)$$
が成り立つ；

（3）　任意の $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqq 0$, $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\Sigma$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\in\boldsymbol{R}$, $S_1,S_2,\cdots,S_m\in\Sigma$ に対して，
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)\leqq v(P)\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j(1_{S_j}-1_{T^{-1}S_j})\right\| \qquad (**)$$
が成り立つ．

証明　（1）⟹（2）：$\mu\in\mathcal{C}_T(v)$ としよう．(*) を満たすような $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqq 0$, $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\Sigma$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\in\boldsymbol{R}$, $S_1,S_2,\cdots,S_m\in\Sigma$ に対して，
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}\eta_j\{\mu(S_j)-\mu(T^{-1}S_j)\}\leqq\mu(P)$$
なので，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu(A_i)\leqq\mu(P)$ となる．だから，
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)\leqq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu(A_i)\leqq\mu(P)=v(P).$$

（2）⟹（3）：任意の $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqq 0$, $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\Sigma$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\in\boldsymbol{R}$, $S_1,S_2,\cdots,S_m\in\Sigma$ に対して，
$$a=\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j(1_{S_j}-1_{T^{-1}S_j})\right\|$$
とすると，$a=0$ のときは，
$$k\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j(1_{S_j}-1_{T^{-1}S_j})\right)\leqq 1_P \qquad (k=1,2,\cdots).$$
だから（2）より
$$\sum_{i=1}^{n}k\lambda_i v(A_i)=k\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)\right)\leqq v(P) \qquad (k=1,2,\cdots)$$
となり，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)=0$ であることがいえる．よって (**) がいえる．

$a \neq 0$ のときは

$$\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta_j (1_{S_j} - 1_{T^{-1}S_j})\right) \leqq 1_P$$

であるので，（2）より $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a}\lambda_i v(A_i) \leqq v(P)$ がいえる．だから

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqq av(P) = v(P)\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} \eta_j (1_{S_j} - 1_{T^{-1}S_j})\right\|.$$

これで，（2）⟹（3）が証明できた．

（3）⟹（1）：問題 5.4.1 によって

$$\begin{aligned}
&\|\mu^*\| \leqq v(P);\\
&\mu^*(1_A) \geqq v(A) \qquad (\forall A \in \Sigma);\\
&\mu^*(1_S - 1_{T^{-1}S}) \geqq 0 \quad (\forall S \in \Sigma);\\
&\mu^*(1_{T^{-1}S} - 1_S) \geqq 0 \quad (\forall S \in \Sigma)
\end{aligned}$$

となるような $\mu^* \in B^*(P, \Sigma)$ が存在するための必要十分条件は，任意の $n \in \boldsymbol{N}$ と $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) \in T_n$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\sum_i \delta_i v(A_i) + \sum_j \delta_j \cdot 0 + \sum_k \delta_k \cdot 0\\
&\quad \leqq v(P)\left\|\sum_i \delta_i 1_{A_i} + \sum_j \delta_j (1_{S_j} - 1_{T^{-1}S_j}) + \sum_k \delta_k (1_{T^{-1}S_k} - 1_{S_k})\right\|
\end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし，} \sum_i \delta_i + \sum_j \delta_j + \sum_k \delta_k = 1,\ i+j+k=n \text{ である}\right)$$

が成り立つことである．すなわち（3）が成り立つことである．▨

定理 6.2.1 の直接の結果として，つぎの Delbaen の結果を得る．

系 6.2.2 (Delbaen の定理)　v：$\Sigma \to \boldsymbol{R}^+$ をゲームとする．このとき，つぎの条件は同値である．

（1）　$C(v)$ が空でない；

（2）　任意の $n \in \boldsymbol{N}$ と，$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} \leqq 1_P$ となるような $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Sigma$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqq v(P)$$

が成り立つことである；

（3）　任意の $n \in \boldsymbol{N}$ と，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Sigma$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqq v(P)\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i}\right\|$$

が成り立つことである．

$v\colon \Sigma\to\boldsymbol{R}^+$ をゲームとする．このとき，任意の $A_0\in\Sigma$ に対して，

$$\mu(A_0)=v(A_0)$$

となるような $\mu\in\mathcal{C}(v)$ が存在するならば，ゲーム v は **exact** といわれる．

定理 6.2.3　$v\colon \Sigma\to\boldsymbol{R}^+$ をゲームとし，T を P から P への写像で，$S\in\Sigma$ のとき $T^{-1}S\in\Sigma$ であるものとする．このとき，つぎの（1），（2），（3）は同値である．

（1）　任意の $A_0\in\Sigma$ に対して，$v(A_0)=\mu(A_0)$ となるような $\mu\in C_T(v)$ が存在する；

（2）

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}-\lambda_0 1_{A_0}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j(1_{S_i}-1_{T^{-1}S_j})\leqq 1_P$$

となるような $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqq 0$，$A_0,A_1,\cdots,A_n\in\Sigma$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\in\boldsymbol{R}$，$S_1,S_2,\cdots,S_m\in\Sigma$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)-\lambda_0 v(A_0)\leqq v(P)$$

が成り立つ；

（3）　任意の $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqq 0$，$A_0,A_1,\cdots,A_n\in\Sigma$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\in\boldsymbol{R}$ と，$S_1,S_2,\cdots,S_m\in\Sigma$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)-\lambda_0 v(A_0)\leqq v(P)\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}-\lambda_0 1_{A_0}+\sum_{j=1}^{m}\eta_j(1_{S_j}-1_{T^{-1}S_j})\right\|$$

が成り立つ．

証明　定理 6.2.1 と同様にして，（1）⟹（2），（2）⟹（3）は証明できる．よって，（3）⟹（1）を証明する．$A_0\in\Sigma$ とする．このとき，問題 5.4.1 によって，

$$\|\mu^*\|\leqq v(P);$$
$$\mu^*(1_A)\geqq v(A)\quad(\forall A\in\Sigma);$$
$$\mu^*(1_S-1_{T^{-1}S})\geqq 0\quad(\forall S\in\Sigma);$$
$$\mu^*(1_{T^{-1}S}-1_S)\geqq 0\quad(\forall S\in\Sigma);$$
$$\mu^*(-1_{A_0})\geqq -v(A_0)$$

となるような $\mu^*\in B^*(P,\Sigma)$ が存在する．だから，$\mu(A_0)=v(A_0)$ となるような $\mu\in\mathcal{C}_T(v)$ が存在する．▨

ゲーム $v\colon \Sigma\to\boldsymbol{R}^+$ が **convex** であるとは，任意の $A,B\in\Sigma$ に対して，

$$v(A)+v(B)\leqq v(A\cup B)+v(A\cap B)$$

が成り立つことである．

Delbaen はゲーム v が convex であるための必要十分条件は，$B_1\supset B_2\supset\cdots$

$\supset B_m$ となるような $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma$ に対して，

$$\mu(B_j)=v(B_j) \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

となるような $\mu \in \mathcal{C}(v)$ が存在することであるということを示した．定理 6.2.1 と定理 6.2.3 と同様に，これをつぎの形にまで拡張してみよう．

定理 6.2.4 $v\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^+$ をゲームとし，T を P から P への写像で，$S \in \Sigma$ のとき $T^{-1}S \in \Sigma$ となるものとする．このとき，つぎの (1), (2), (3), (4) は同値である．

(1) $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$ となるような $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma$ に対して，

$$\mu(B_j)=v(B_j) \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

となるような $\mu \in \mathcal{C}_T(v)$ が存在する;

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} + \sum_{k=1}^{l} \delta_k (1_{S_k} - 1_{T^{-1}S_k}) \leqq \sum_{j=1}^{m} \eta_j 1_{B_j}$$

となるような $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Sigma$, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m \in \boldsymbol{R}$, $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma$ (ただし，$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$), $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l \in \boldsymbol{R}$, $S_1, S_2, \cdots, S_l \in \Sigma$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqq \sum_{j=1}^{m} \eta_j v(B_j)$$

が成り立つ;

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} - \sum_{j=1}^{m} \eta_j 1_{B_j} + \sum_{k=1}^{l} \delta_k (1_{S_k} - 1_{T^{-1}S_k}) \leqq 1_P$$

となるような $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Sigma$, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m \in \boldsymbol{R}$, $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma$ (ただし，$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$), $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l \in \boldsymbol{R}$, $S_1, S_2, \cdots, S_l \in \Sigma$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) - \sum_{j=1}^{m} \eta_j v(B_j) \leqq v(P)$$

が成り立つ;

(4) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqq 0$, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Sigma$, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m \in \boldsymbol{R}$, $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma$ (ただし，$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$), $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_l \in \boldsymbol{R}$, $S_1, S_2, \cdots, S_l \in \Sigma$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) - \sum_{j=1}^{m} \eta_j v(B_j) \leqq v(P) \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i} - \sum_{j=1}^{m} \eta_j 1_{B_j} + \sum_{k=1}^{l} \delta_k (1_{S_k} - 1_{T^{-1}S_k}) \right\|$$

が成り立つ．

証明　(1)$\Longrightarrow$(2) は定理 6.2.3 の証明と同じである．(2)$\Longrightarrow$(3) は P を

$$P, B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma, \quad P \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$$

と考え，(2) を使えばよい．(3)$\Longrightarrow$(4) は定理 6.2.3 の証明と同じである．

(4)$\Longrightarrow$(1)：$B_1, B_2, \cdots, B_m \in \Sigma$（ただし，$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m$）としよう．このとき，問題 5.4.1 によって

$$\begin{aligned}
&\|\mu^*\| \leqq v(P); \\
&\mu^*(1_A) \geqq v(A) && (\forall A \in \Sigma); \\
&\mu^*(1_S - 1_{T^{-1}S}) \geqq 0 && (\forall S \in \Sigma); \\
&\mu^*(1_{T^{-1}S} - 1_S) \geqq 0 && (\forall S \in \Sigma); \\
&\mu^*(-B_j) \geqq -v(B_j) && (j = 1, 2, \cdots, m)
\end{aligned}$$

となるような $\mu^* \in B^*(P, \Sigma)$ が存在する．よって，

$$\mu(B_j) = v(B_j) \qquad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

となるような $\mu \in \mathcal{C}_T(v)$ が存在する．■

問　題 6.2

1. 定理 6.2.3 において，(1)$\Longrightarrow$(2)，(2)$\Longrightarrow$(3) を証明せよ．
2. 定理 6.2.4 において，(1)$\Longrightarrow$(2)，(3)$\Longrightarrow$(4) を証明せよ．

6.3 線形作用素への応用

この節では，不動点定理，または不動点定理から得られた存在定理を使って，線形作用素に関する3つの定理について議論する．まず初めに，ソ連の高校生 Lomonosov が証明したコンパクト作用素の不変部分空間に関する定理を1の分解と Schauder の不動点定理を使って証明してみよう．

A を Banach 空間 E 上の線形作用素とする．この作用素 A が**コンパクト**であるとは，E の任意の有界集合 G に対して，$A(G)$ の閉包がつねにコンパクト集合となるときをいう．また $B(E,E)$ は E 上の線形有界作用素の全体を表すものとする．

定理 6.3.1 (Lomonosov の定理)　E を無限次元複素 Banach 空間(この定理のみ複素空間)とし，A を 0 でない E 上の線形コンパクト作用素とする．また

$$\mathcal{C}=\{C\in B(E,E):\ AC=CA\}$$

とする．このとき，$\{0\}\subsetneqq X\subsetneqq E$ であり，かつ

$$C(X)\subset X \qquad (\forall C\in\mathcal{C})$$

となるような閉部分空間 X が存在する．

証明　結論を否定しよう．すなわち，すべての $C\in\mathcal{C}$ に対して，$C(X)\subset X$ であり，かつ $\{0\}\subsetneqq X\subsetneqq E$ となるような E の閉部分空間 X が存在しないとしよう．このとき，$Au_0=\lambda u_0$ となる u_0 $(\neq 0)$ が存在しないことがわかる．なぜなら，もし存在したとして

$$X=\{u\in E:\ Au=\lambda u\}$$

とすると，$X\neq\{0\}$ であり，すべての $C\in\mathcal{C}$ に対して，$C(X)\subset X$ である．ここで，$E\supsetneqq X$ とすると仮定に反するので $E=X$ である．すなわち，$u\in E$ ならば，$Au=\lambda u$ である．$\lambda=0$ ならば $A=0$ となり仮定に反するし，$\lambda\neq 0$ ならば，$\lambda S_1[0]$ がコンパクト集合となり，E が無限次元であることに反する．(ただし，$S_r[z]$ は z を中心とし，半径 r の閉球を表すものとする．)　だから $Au_0=\lambda u_0$ となる u_0 $(\neq 0)$ が存在しない．

$\lambda=0$ は A の固有値でない．だから $u\neq 0$ ならば $Au\neq 0$ となり，$\lambda\to\infty$ ならば $\|A(\lambda u)\|\to\infty$ となる．また，$\|x-y\|\leqq 1$ ならば $\|Ax-Ay\|\leqq\|A\|$ なので，

$$\inf\{\|Ax\|:\ x\in S_1[x_0]\}>0$$

となるような $x_0\in E$ の存在がわかる．いま $S_1[x_0]=S$ とすると，任意の $y\in$

$\overline{AS}$ に対して，$\|T_y y - x_0\| < 1$ となる $T_y \in \mathcal{C}$ が存在する．なぜなら，すべての $T \in \mathcal{C}$ に対して，$\|Ty - x_0\| \geqq 1$ となるような $y \in \overline{AS}$ が存在したとすると，$\{Ty\colon T \in \mathcal{C}\}$ の閉包 X は E の閉部分空間で，すべての $C \in \mathcal{C}$ のもとで不変である．$\|Ty - x_0\| \geqq 1$ より $x_0 \notin X$ となり，$\{0\} \subsetneqq X \subsetneqq E$ もわかる．これは仮定に反する．

いま，$T \in \mathcal{C}$ に対して，

$$G_T = \{y \in \overline{AS}\colon \|Ty - x_0\| < 1\}$$

とすると，$\{G_T\colon T \in \mathcal{C}\}$ は $\overline{AS}$ の開被覆となる．$\overline{AS}$ はコンパクト集合なので，$\{T_1, T_2, \cdots, T_n\} \subset \mathcal{C}$ が存在して，$\{G_{T_1}, G_{T_2}, \cdots, G_{T_n}\}$ が $\overline{AS}$ の開被覆となるようにできる．$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ をこの開被覆に対応する 1 の分解とし，$\overline{AS}$ から E への写像 Φ を

$$\Phi y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y)\, T_i y$$

で定義すると，$\Phi y \in S$ を得る．なぜなら，$\beta_i(y) \neq 0$ ならば $y \in G_{T_i}$ であり，これは $\|T_i y - x_0\| < 1$ を意味する．よって

$$\|x_0 - \Phi y\| \leqq \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y) \|T_i y - x_0\| < 1.$$

すなわち，$\Phi y \in S$ を得る．だから $A\Phi(\overline{AS}) \subset \overline{AS}$ である．ここで Schauder の不動点定理(定理5.2.4)を使うと，$A\Phi y_0 = y_0$ となる $y_0 \in \overline{AS}$ を得る．この y_0 に対して，

$$T = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y_0)\, T_i A$$

とすると，T はコンパクト作用素であり(問題 6.3.1)，

$$Ty_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y_0)\, T_i A y_0 = A\Phi y_0 = y_0$$

である．いま，

$$X_0 = \{x \in E\colon Tx = x\}$$

とすると，X_0 は有限次元となる．ゆえに $AX_0 \subset X_0$ から $Au_0 = \mu u_0, u_0 \neq 0$ となる $u_0 \in X_0$ の存在がわかる．これは A の固有ベクトルが存在しないことに反する．これで定理が証明された．▨

注　これまで，この定理はコンパクト作用素 A に対して，$\{0\} \subsetneqq X \subsetneqq E$ であり，かつ $AX \subset X$ となる閉部分空間 X が存在するという形で知られていた．そして，その証明もそれほど簡単ではなかった．

つぎに，Fan のシステム定理(定理 5.4.2)を使って，Markov 作用素に対する 1 つの定理を証明してみよう．

X をコンパクト Hausdorff 空間とし，$C(X)$ を X 上の連続関数全体のつくる Banach 空間とする．$C(X)_+$ をその正錐とする．すなわち，

$$C(X)_+ = \{f \in C(X) : f \geqq 0\}$$

とする．T が $C(X)$ 上の **Markov 作用素**であるとは，T が $C(X)$ 上の線形連続作用素であり，かつ $T1=1$, $f \geqq 0 \Longrightarrow Tf \geqq 0$ を満たすときをいう．Σ を $C(X)$ 上の Markov 作用素のつくるある半群とし，

$$M = \{\mu \in C(X)^* : \|\mu\| = \mu(1) = 1\}$$

とする．このとき，すべての $T \in \Sigma$ に対して，$\mu = T^*\mu$ となるような $\mu \in M$ を **Σ-不変な確率測度**ということにする．

定理 6.3.2　つぎの（1），（2），（3），（4）の命題は同値である．

（1）　Σ-不変な確率測度が存在する；

（2）　任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+{}^n$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} T_i f_i(x) \leqq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

となる $x \in X$ が存在する；

（3）　任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$ と $\sum_{i=1}^{n+1} f_i = c$ となる任意の $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}) \in C(X)_+{}^{n+1}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} T_i f_i(x) + f_{n+1}(x) \leqq c$$

となる $x \in X$ が存在する；

（4）　任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$ と $\sum_{i=1}^{n} T_i f_i + f_{n+1} = c$ となる任意の $(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}) \in C(X)_+{}^{n+1}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \geqq c$$

となる $x \in X$ が存在する．

証明　（1）$\Longrightarrow$（4）：$\mu \in M$ を Σ-不変な確率測度とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} T_i f_i + f_{n+1} = c$$

となる $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$，$(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}) \in C(X)_+{}^{n+1}$ に対して，

$$c = \mu(c) = \mu\left(\sum_{i=1}^{n} T_i f_i + f_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} T_i{}^*\mu(f_i) + \mu(f_{n+1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(f_i) + \mu(f_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(f_i)$$

であるから，$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \geqq c$ となる $x \in X$ が存在することになる．

（4）⟹（2）：任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+{}^n$ に対して，

$$c = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} T_i f_i(x)$$

とし，$f_{n+1} = c - \sum_{i=1}^{n} T_i f_i$ とする．このとき，（4）を使えば $\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \geqq c$ となる $x \in X$ が存在する．よって

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i(x) \geqq c = \sum_{i=1}^{n} T_i f_i(x) + f_{n+1}(x)$$

である．両辺から $f_{n+1}(x)$ を引くことによって，（2）が得られる．

（2）⟹（1）：任意の $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して，M 上の関数 $F_{f,T}$ を

$$F_{f,T}(\mu) = \mu(f - Tf) \qquad (\mu \in M)$$

で定義する．任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in \Sigma^n$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+{}^n$ に対して，（2）より

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_x(T_i f_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \delta_x(f_i)$$

となる $\delta_x \in M$ が存在するから，定理 5.4.2 から，すべての $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)_+$ に対して，

$$\mu(Tf) \leqq \mu(f) \qquad (*)$$

となる $\mu \in M$ が存在する．$\|f\| \cdot 1 - f \geqq 0$ なので，$(*)$ を使うと

$$\mu(T(\|f\| \cdot 1 - f)) \leqq \mu(\|f\| \cdot 1 - f)$$

を得る．これから，$\mu(Tf) \geqq \mu(f)$ である．よって $(*)$ より

$$\mu(Tf) = \mu(f) \qquad ({}^\forall T \in \Sigma,\ {}^\forall f \in C(X)_+)$$

となる．だから，任意の $T \in \Sigma$ と $f \in C(X)$ に対して，$\mu(Tf) = \mu(f)$ を得る．

（2）⟹（3），（3）⟹（2）は問題として残そう（問題 6.3.3）．▨

注　T を X から X への連続写像とし，$f \in C(X)$ とする．このとき，

$$\hat{T} f(x) = f(Tx) \qquad ({}^\forall x \in X)$$

とすると，$\hat{T}$ は $C(X)$ 上の Markov 作用素である（問題 6.3.4）．

Roberts は定理 6.3.2 を違った証明方法で，つぎのような形で得ていた．

K を X から X への連続写像の族とする．このとき，つぎの（1），（2）は同値である．

（1）　$\Sigma = \{\hat{T} : T \in K\}$-不変な確率測度が存在する；

（2）　任意の $(T_1, T_2, \cdots, T_n) \in K^n$ と $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in C(X)_+{}^n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(T_i x) \leqq \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

となるような $x\in X$ が存在する.

この節の最後に, Hardy–Littlewood–Pólya の定理を Fan のシステム定理を使って証明してみよう.

$n\times n$ 行列 $\{p_{ij}\}$ が **doubly stochastic** であるとは, $p_{ij}\geqq 0$ であり, かつ

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1 \quad ({}^\forall j), \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1 \quad ({}^\forall i)$$

を満たすときをいう.

定理 6.3.3 (Hardy–Littlewood–Pólya の定理)　実数 a_i, b_i $(1\leqq i\leqq n)$ がつぎの条件を満たすものとする:

$$a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n\geqq 0, \qquad b_1\geqq b_2\geqq\cdots\geqq b_n\geqq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i\leqq\sum_{i=1}^{k} b_i \ (1\leqq k\leqq n), \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

このとき,

$$a_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}b_j \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

となるような $n\times n$ の doubly stochastic 行列 $\{p_{ij}\}$ が存在する.

証明　K を $n\times n$ の doubly stochastic 行列の全体とする. このとき, K は n^2–次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合とみなされる. 任意の $n\times n$ doubly stochastic 行列 $P=\{p_{ij}\}$ に対して,

$$f_i(P)=a_i-\sum_{j=1}^{n} p_{ij}b_j \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

を定義しよう. このとき, 定理の結論は, $2n$ 個の不等式のシステム

$$f_i(P)\leqq 0, \ \ -f_i(P)\leqq 0 \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

が解をもつことと同値である. Fan のシステム定理(定理5.3.1)にしたがって, これはつぎの命題を証明すれば十分である:

任意の実数 c_i に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(P)\leqq 0 \tag{$*$}$$

となるような $n\times n$ doubly stochastic 行列 $P=\{p_{ij}\}$ が存在する.

$(*)$ 式は

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i\leqq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij}b_j \tag{$**$}$$

と同じであるから, $c_i\geqq 0$ の場合に $(**)$ を考えればよい. 実際,

$$c_i'=c_i+d\geqq 0 \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

となるように $d \geqq 0$ をとることができ，$n \times n$ doubly stochastic 行列 $P=\{p_{ij}\}$ が，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' a_i \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i' p_{ij} b_j$$

を満たすならば，$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$ と $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}=1$ によって，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d p_{ij} b_j = d \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} b_j = d \sum_{j=1}^{n} b_j = d \sum_{i=1}^{n} a_i$$

となるから，同じ行列 $P=\{p_{ij}\}$ が (**) を満たす．

いまや $c_i \geqq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の場合を考えよう．Π を $1,2,\cdots,n$ の置換で $c_{\Pi(1)} \geqq c_{\Pi(2)} \geqq \cdots \geqq c_{\Pi(n)}$ なるものとしよう．このとき，$P'=\{p_{ij}\}$ を

$$p_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=\Pi(j) \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq \Pi(j) \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると，$P'=\{p_{ij}\}$ は (**) を満たす．実際，

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0, \qquad b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

から，

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_{\Pi(i)} a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_{\Pi(i)} b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j$$

となるからである．よって定理は証明できた．　▨

問　題 6.3

1.　E を Banach 空間とし，A: $E \to E$ をコンパクト作用素とする．このとき，任意の $T \in B(E,E)$ に対して，TA, AT はコンパクト作用素である．これを示せ．

2.　X を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，$\Sigma=\{f_\nu : \nu \in I\}$ を X から $\boldsymbol{R}$ への下半連続な凸関数の族とする．このとき，$f_\nu(x) \leqq 0$ $(\forall \nu \in I)$ となる $x \in X$ が存在するための必要十分条件は，任意の $n \in \boldsymbol{N}$ と，$(f_{\nu_1}, f_{\nu_2}, \cdots, f_{\nu_n}) \in \Sigma^n$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} f_{\nu_i}(y) \leqq 0$$

となる $y \in X$ が存在することである．これを示せ．

3.　定理 6.3.2 において，(2)⇔(3) を示せ．

4. Xをコンパクト Hausdorff 空間とし，TをXからXへの連続写像とする．このとき，$f\in C(X)$ に対して，

$$(\hat{T}f)(x)=f(Tx) \qquad (^{\forall}x\in X)$$

とすると，$\hat{T}$は$C(X)$ 上の Markov 作用素である．これを示せ．

6.4 線形不等式と最小ノルム問題

この節では，minimax 定理を用いて線形不等式のシステムをベクトル値の場合で考察する．

E と F をノルム空間とする．F^* を F の共役空間とし，$B(E,F^*)$ を E から F^* への有界線形作用素のつくる Banach 空間とする．$x\in E$ と $t\in F$ に対して，$B(E,F^*)$ 上の有界線形汎関数 tx を

$$tx(A)=(t,Ax) \qquad (\forall A\in B(E,F^*))$$

で定義しよう．このとき，$B(E,F^*)$ の位相として，$\{tx: x\in E,\ t\in F\}$ を連続にするような最弱位相が考えられるが，これを $B(E,F^*)$ の **w-位相**とよぶことにする．0を含む $B(E,F^*)$ の部分集合 K に対して，$B(E,F^*)^*$ 上の非負な sublinear な関数 p_K を

$$p_K(f)=\sup\{f(A): \|A\|\leqq 1,\ A\in K\} \qquad (\forall f\in B(E,F^*)^*)$$

で定義しよう．このとき，$K=B(E,F^*)$ ならば，$p_K(f)=\|f\|$ $(\forall f\in B(E,F^*)^*)$ である．また，つぎの補助定理が成り立つ．

補助定理 6.4.1 C を0を含む F の凸集合とする．$r_1,r_2,\cdots,r_n$, α を非負な数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ を E の元，$t_1^*,t_2^*,\cdots,t_n^*$ を F^* の元とする．また K を0を含む $B(E,F^*)$ の部分集合で，w-位相のもとで閉な凸集合とする．このとき，

$$(t,t_i^*-Ax_i)\leqq\|t\|r_i \quad (\forall t\in C, i=1,2,\cdots,n),$$
$$\|A\|\leqq\alpha, \qquad A\in\alpha K$$

を満たす $A\in B(E,F^*)$ が存在するための必要十分条件は，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i,t_i^*)-\sum_{i=1}^{n}\|t_i\|r_i\leqq\alpha p_K\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right) \qquad (\forall (t_i)\in C^n)$$

がつねに成り立つことである．

証明 十分性を示す．

$$X=\{A\in B(E,F^*): \|A\|\leqq\alpha,\ A\in\alpha K\}$$

とする．このとき，X は凸集合である．また X は w-位相に関してコンパクトである．実際，$M(E,F^*)$ を E から F^* への線形写像全体のつくる線形空間とし，その位相を各点収束位相とする（p. 8 を参照）．このとき，$B(E,F^*)$ は $M(E,F^*)$ の中に埋蔵可能である．そこで，X が $M(E,F^*)$ でコンパクトであることをいえばよい．$\{A_m\}$ を $A\in M(E,F^*)$ に収束するネットとする．こ

のとき，A が線形であることは明らか．また，$x\in E$ に対して

$$\|Ax\|\leqq\varliminf_m\|A_mx\|\leqq(\varliminf_m\|A_m\|)\|x\|\leqq\alpha\|x\|$$

であるから，$\|A\|\leqq\alpha$ である．αK は $M(E,F^*)$ で閉であるので，$A\in\alpha K$ である．ゆえに，$A\in X$ である．だから，X は $M(E,F^*)$ で閉である．X はコンパクト集合 $\{A\in M(E,F^*):\ \|Ax\|\leqq\alpha\|x\|\ (\forall x\in E)\}$ の部分集合なので，X もまたコンパクトである．つぎに，$X\times C^n$ 上に実数値関数 G を

$$G(A,(t_i))=\sum_{i=1}^n(t_i,t_i^*-Ax_i)-\sum_{i=1}^n\|t_i\|r_i\qquad(\forall(A,(t_i))\in X\times C^n)$$

で定義すると，$G(\cdot,(t_i))$ はアフィンであり，w-位相で連続である．また，$G(A,\cdot)$ は C^n 上で凹である．ゆえに，minimax 定理(定理 5.3.2)が使えて，

$$\sup_{(t_i)}\min_A G=\min_A\sup_{(t_i)}G.$$

$(t_i)\in C^n$ としよう．このとき，

$$\alpha p_K\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)=\alpha\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)(A):\ \|A\|\leqq1,\ \ A\in K\right\}$$
$$=\sup\left\{\sum_{i=1}^n(t_i,\alpha Ax_i):\ \|A\|\leqq1,\ \ A\in K\right\}$$
$$=\sup\left\{\sum_{i=1}^n(t_i,Bx_i):\ \|B\|\leqq\alpha,\ \ B\in\alpha K\right\}.$$

また X は w-位相でコンパクトであり，

$$g(B)=\sum_{i=1}^n(t_i,Bx_i)$$

で定義される関数 g は w-位相で連続であるので

$$\alpha p_K\left(\sum_{i=1}^n t_ix_i\right)=\sum_{i=1}^n(t_i,Bx_i)$$

となるような $B\in X$ が存在する．ここで，仮定を用いると

$$\sum_{i=1}^n(t_i,t_i^*)-\sum_{i=1}^n\|t_i\|r_i\leqq\sum_{i=1}^n(t_i,Bx_i)$$

である．これは $\sup_{(t_i)}\min_A G\leqq0$ を意味する．よって $\min_A\sup_{(t_i)}G\leqq0$ である．だから，

$$G(A,(t_i))\leqq0\qquad(\forall(t_i)\in C^n)$$

となるような $A\in X$ が存在する．C は 0 を含むので，

$$(t,t_i^*-Ax_i)\leqq\|t\|r_i\qquad(\forall t\in C,\ \ i=1,2,\cdots,n)$$

を得る．

必要性を示す．$(t_i)\in C^n$ としよう．仮定より

$$(t, t_i^* - Ax_i) \leqq \|t\| r_i \quad ({}^\forall t \in C, i=1,2,\cdots,n),$$
$$\|A\| \leqq \alpha, \qquad A \in \alpha K$$

となる $A \in B(E, F^*)$ が存在するので，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i, t_i^* - Ax_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \|t_i\| r_i$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_i^*) - \sum_{i=1}^{n}\|t_i\| r_i &\leqq \sum_{i=1}^{n}(t_i, Ax_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(t_i x_i)A\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right)A\\ &\leqq \alpha p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right).\end{aligned}$$

これは証明を完了する． ▨

E をノルム空間とし，F を順序ノルム空間とする．$\{x_\nu : \nu \in I\}$ を E の元の集合とし，$\{t_\nu^* : \nu \in I\}$ をそれに対応する F^* の元からなる集合とする．ここで線形不等式のシステム(**RS**)：

$$Ax_\nu \geqq t_\nu^* \qquad ({}^\forall \nu \in I) \tag{$*$}$$

を考えよう．このとき，$(*)$ を満たす $A \in B(E, F^*)$ のことを，システム (RS) の解という．

定理 6.4.2 α を非負な数とし，K を 0 を含む $B(E, F^*)$ の部分集合で，w-位相のもとで閉な凸集合とする．このとき，つぎの命題は同値である．

（1） システム (RS) が $\|A\| \leqq \alpha$, $A \in \alpha K$ となるような解 A をもつ;

（2） 任意の n 個の指標 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$ と n 個の F の元 $t_1, t_2, \cdots, t_n \geqq 0$ に対して，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\alpha_i}^*) \leqq \alpha p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right)$$

がつねに成り立つ．

証明 $C = F_+$, $r_i = 0$, $x_i = x_{\nu_i}$, $t_i^* = t_{\nu_i}^*$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とおいて，補助定理 6.4.1 を用いると，命題（2）は

$$(t, t_{\nu_i}^* - Ax_{\nu_i}) \leqq 0 \quad (t \geqq 0),$$
$$\|A\| \leqq \alpha, \qquad A \in \alpha K$$

となる $A \in B(E, F^*)$ の存在に同値な命題となる．よって，

$$Ax_{\nu_i} \geqq t_{\nu_i}^* \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

となる．$X=\{A\in B(E, F^*): \|A\|\leqq\alpha,\ A\in\alpha K\}$ は w-位相でコンパクトであり，集合 $\{A\in B(E, F^*): Ax_\nu\geqq t_\nu^*\}$ はすべての $\nu\in I$ に対して閉集合となるので，命題（1）と（2）は同値であることがわかる． ▨

定理 6.4.2 の特別な場合として，つぎの 2 つの定理が得られる．

定理 6.4.3 α を非負な数とし，K を $B(E, F^*)$ の w-位相で閉な凸錐とする．このとき，つぎの命題は同値である．

（1） システム (RS) が $\|A\|\leqq\alpha$, $A\in K$ となるような解 A をもつ;

（2） 任意の n 個の指標 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n\in I$ と n 個の F の元 $t_1, t_2, \cdots, t_n\geqq 0$ に対して，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*)\leqq\alpha p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right)$$

がつねに成り立つ．

定理 6.4.4 α を非負な数とする．このとき，つぎの命題は同値である．

（1） システム (RS) が $\|A\|\leqq\alpha$ となるような解をもつ;

（2） 任意の n 個の指標 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n\in I$ と n 個の F の元 $t_1, t_2, \cdots, t_n\geqq 0$ に対して，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*)\leqq\alpha\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right\|$$

がつねに成り立つ．

つぎに制約条件のある最小ノルム問題について考えよう．

定理 6.4.5 K を $B(E, F^*)$ の w-位相で閉な凸錐とする．また，

$$\alpha=\sup\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*)$$

とする．ただし，n は任意の自然数で，ν_i と t_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は

$$t_i\geqq 0 \quad (1\leqq i\leqq n), \qquad p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right)\leqq 1$$

の条件のもとで動くものとする．

このとき，

（i） システム (RS) が K に属する解をもつための必要十分条件は，α が有限となることである．

（ii） システム (RS) が K に属する解をもつならば，

$$\alpha=\min\{\|A\|: A\in K \text{ は (RS) の解}\}$$

である．

証明 (i) A を K に属するシステム (RS) の解としよう．このとき $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$ と $t_1, t_2, \cdots, t_n \geqq 0$, $p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right) \leqq 1$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*) \leqq \sum_{i=1}^{n}(t_i, Ax_{\nu_i}) = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right)A$$

$$= \|A\| p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right) \leqq \|A\|$$

である．よって，$\alpha \leqq \|A\| < \infty$ である．逆に α が有限であるとしよう．このとき，$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$ と $t_1, t_2, \cdots, t_n \geqq 0$ に対して

$$\alpha p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right) \geqq \sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*)$$

である．実際，$\delta = p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right) > 0$ ならば,

$$p_K\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{\delta} x_{\nu_i}\right) = 1$$

である．よって，$\alpha \geqq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\delta}, t_{\nu_i}^*\right)$ である．すなわち，$\alpha\delta \geqq \sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*)$ である．$\delta = 0$ ならば，すべての $\lambda \geqq 0$ に対して

$$p_K\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda t_i) x_{\nu_i}\right) = \lambda p_K\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right) = 0$$

である．よって $\lambda \sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*) \leqq \alpha$ $(\forall \lambda \geqq 0)$．これは

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*) \leqq 0 = \alpha\delta$$

を意味する．ゆえに，定理 6.4.3 より，システム (RS) は $\|A\| \leqq \alpha$, $A \in K$ となる解 A をもつ．

(ii) A を K に属するシステム (RS) の解としよう．このとき，(i) の証明のようにして，$\alpha \leqq \|A\|$ をもつ．一方，定理 6.4.3 より $A \in K$, $\|A\| \leqq \alpha$ となるようなシステム (RS) の解 A が存在するので,

$$\alpha = \min\{\|A\| : A \in K \text{ は (RS) の解}\}$$

である． ▨

定理 6.4.5 の直接的な結果として，つぎの定理が得られる．

定理 6.4.6 (RS) において，$\{x_\nu\}$ をすべては 0 でない E の部分集合とする．また,

$$\alpha' = \sup \sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}^*)$$

とする．ただし，n は任意の自然数で，ν_i と t_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は

$$t_i \geqq 0 \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i} \right\| = 1$$

の条件のもとで動くものとする．

このとき，

（i） システム (RS) が解をもつための必要十分条件は，α' が有限となることである．特に，0 が (RS) の解であるための必要十分条件は，$\alpha' \leqq 0$ である．また，(RS) が解をもち，かつ 0 が (RS) の解でないための必要十分条件は，$0 < \alpha' < \infty$ となることである．

（ii） $0 < \alpha' < \infty$ ならば，

$$\alpha' = \min\{\|A\| : A \text{ は (RS) の解}\}$$

である．

証明　0 でない元 x_ν に対して，$\|tx_\nu\|=1$ となるような $t \gneqq 0$ が存在することは明らかである．ゆえに $\alpha' > -\infty$ である．$\alpha' \leqq 0$ と仮定し，$x_\nu \neq 0$ としよう．$t_\nu^* \nleqq 0$ ならば，そのとき，$\|tx_\nu\|=1$ でかつ $(t, t_\nu^*) > 0$ となるような $t \gneqq 0$ が存在する．これは $\alpha' \leqq 0$ に矛盾する．よって $t_\nu^* \leqq 0$ である．$x_\nu = 0$ ならば，$\|t_\mu x_\mu\| = 1$ となるように $x_\mu \neq 0$ と $t_\mu \gneqq 0$ をとることができる．すべての $t \geqq 0$ に対して，$\|tx_\nu + t_\mu x_\mu\| = 1$ であるから

$$(t, t_\nu^*) + (t_\mu, t_\mu^*) \leqq \alpha' \leqq 0 \qquad ({}^\forall t \geqq 0)$$

である．これは $t_\nu^* \leqq 0$ を意味する．よって 0 は (RS) の解である．逆に 0 が解ならば，$\alpha' \leqq 0$ ということは明らかである．つぎに $0 < \alpha' < \infty$ と仮定しよう．このとき，

$$\alpha' = \sup \sum_{i=1}^{n} (t_i, t_{\nu_i}^*) \tag{$*$}$$

である．ただし，n は任意の自然数で，ν_i と t_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は

$$t_i \geqq 0 \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i} \right\| \leqq 1$$

を満たすものとする．実際，$t_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$ としよう．

$$0 < \delta' = \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i} \right\| \leqq 1$$

ならば，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{t_i}{\delta'}, t_{\nu_i}^* \right) \leqq \alpha'$ である．だから $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (t_i, t_{\nu_i}^*) \leqq \alpha'$ である．$\delta' = 0$ ならば，$\|t_\mu x_\mu\| = 1$ となるように $x_\mu \neq 0$ と $t_\mu \gneqq 0$ をとることができる．だからすべての $\lambda \geqq 0$ に対して

$$\alpha' \geqq (t_\mu, t_\mu^*) + \lambda \sum_{i=1}^{n} (t_i, t_{\nu_i}^*)$$

である．よって $\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}{}^*)\leqq 0<\alpha'$ である．ゆえに，(*) がいえた．定理 6.4.5 によって，システム (RS) は解をもち，かつ

$$\alpha'=\min\{\|A\|:\ A \text{ は (RS) の解}\}$$

である．証明を完了するためには，(RS) が解をもつという仮定のもとで，α' が有限であることを示せばよい．実際，定理 6.4.5 によって

$$\alpha'\leqq\sup\sum_{i=1}^{n}(t_i, t_{\nu_i}{}^*)<\infty$$

である．ただし，n は任意の自然数で，ν_i と t_i $(i=1,2,\cdots,n)$ は

$$t_i\geqq 0 \quad (1\leqq i\leqq n), \qquad \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_{\nu_i}\right\|\leqq 1$$

を満たすものとする．よって，α' は有限である．▨

問 題 6.4

1. X を線形位相空間 E のコンパクトで凸な集合とし，F を順序ノルム空間とする．また F_+ を F の正錐とする．G を X から F への連続で凸な写像とし，つぎの条件を満たすものとする．

任意の $\varphi\in F_+{}^*$ に対して，$(G(y),\varphi)\leqq 0$ となる $y\in X$ が存在する．このとき $G(x_0)\leqq 0$ となる $x_0\in X$ が存在する．これを示せ．

注 G: $X\to F$ が**凸な写像**であるとは，任意の $x, y\in X$ と λ $(0\leqq\lambda\leqq 1)$ に対して，

$$G(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqq\lambda G(x)+(1-\lambda)G(y)$$

がつねに成り立つときをいう．

2. つぎの Fan の線形不等式に関するシステム定理と定理 6.4.6 を比較せよ．

E をノルム空間とし，$\{x_\nu\}$ をすべては 0 でない E の部分集合，$\{\alpha_\nu\}$ を $\{x_\nu\}$ に対応する実数の集合とする．このとき，つぎの（1）と（2）の条件は同値である．

（1） すべての ν に対して，$f(x_\nu)\geqq\alpha_\nu$ となるような $f\in E^*$ が存在する;

（2） $\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_{\nu_i}:\ \lambda_i>0,\ \left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_{\nu_i}\right\|=1\right\}<\infty$ である．

さらに $S_\rho=\{f\in E^*:\ f(x_\nu)\geqq\alpha_\nu\ (^\forall\nu)\}$ とし，条件（1）のもとで $S_\rho\not\ni 0$ ならば $\sigma=\min_{f\in S_\rho}\|f\|$ である．

参考文献

Aizicovici, S.：“On the asymptotic behaviour of solutions of Volterra equations in Hilbert space,” *Nonlinear Analysis*, **7** (1983), 271–278.

Anzai, K. and S. Ishikawa：“On common fixed point for several continuous affine mappings,” *Pacific J. Math.*, **72** (1977), 1–4.

青木利夫，高橋渉：『集合・位相空間要論』培風館 (1979).

青木利夫，高橋渉，平野載倫：『演習・集合位相空間要論』培風館 (1985).

Baillon, J. B.：“Un théorème de type ergodic pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **280** (1975), 1511–1514.

Baillon, J. B.：“Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semi-groupes de contractions impaires,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **283** (1976), 75–78.

Baillon, J. B.：“Comportment asymptotic des itérés de contractions non linéaires dans les espaces L^p,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **286** (1978), 157–159.

Baillon, J. B. and H. Brézis：“Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non linéaires,” *Houston J. Math.*, **2** (1976), 5–7.

Baillon, J. B., Bruck, R. E. and S. Reich：“On the asymptotic behavior of non-expansive mappings,” *Houston J. Math.*, **4** (1978), 1–9.

Barbu, V.：*Nonlinear semigroups and evolutions equations in Banach spaces*, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti (1976).

Barbu, V. and Th. Precupanu：*Convexity and optimization in Banach spaces*, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti (1978).

Bazaraa, M. S., Goode, J. and M. S. Nashed：“A nonlinear complementarity problem in mathematical programming in Banach spaces,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35** (1972), 165–170.

Belluce, L. P. and W. A. Kirk：“Fixed point theorems for family of contraction mappings,” *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 213–217.

Belluce, L. P. and W. A. Kirk：“Nonexpansive mappings and fixed points in Banach space,” *Illinois J. Math.*, **11** (1967), 474–479.

Brézis, H.：*Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdom (1973).

Brézis, H. and F. E. Browder：“Nonlinear ergodic theorems,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82** (1976), 959–961.

Brézis, H. and F. E. Browder：“Remarks on nonlinear ergodic theory,” *Adv.*

in Math., **25** (1977), 165–177.

Brodskii, M. S. and D. P. Milman : "On the center of a convex set," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* (N. S.), **59** (1948). 837–840.

Browder, F. E. : "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space," *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **54** (1965), 1041–1044.

Browder, F. E. : "Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces," *Arch, Rational. Mech. Anal.*, **24** (1967), 82–90.

Browder, F. E. : "On a new generalization of the Schauder fixed point theorem," *Math. Ann.*, **174** (1967), 285–290.

Browder, F. E. : "The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces," *Math. Ann.*, **177** (1968), 283–301.

Browder, F. E. : "Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces," *Proc. Sympos. Pure Math.*, **100**–2, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1976).

Browder, F. E. and W. V. Petryshyn : "Construction of fixed points of nonlinear mappings in H-space," *J. Math. Anal. Appl.*, **20** (1967), 197–228.

Bruck R. E. : "A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces," *Israel J. Math.*, **32** (1972), 107–116.

Bruck, R. E. : "Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **179** (1973), 251–262.

Bruck, R. E. : "A common fixed-point theorm for a commuting family of nonexpansive mappings," *Pacific J. Math.*, **53** (1974), 59–71.

Bruck, R. E. : "Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space," *J. Funct. Anal.*, 18 (1975), 15–26.

Bruck R. E. : "On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space," *J. Math. Anal. Appl.*, **61** (1977), 159–164.

Bruck R. E. and S. Reich : "Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces," *Houston J. Math.*, **3** (1977), 459–470.

Caristi, J. : "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

Dafermos, C. M. and M. Slemrod : "Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups," *J. Funct. Anal.*, **13** (1973), 97–106.

Day, M. M. : "Amenable semigroup," *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 509–544.

Day, M. M. : "Fixed point theorem for compact convex sets," *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 585–590.

Day, M. M. : *Normed Linear Spaces*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin/New York (1973).

Delbaen, F. : "Convex games and extreme points," *J. Math. Anal. Appl.*, **45** (1974), 210–233.

De Marr, R.：“Common fixed-points for commuting contraction mappings,” *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1139–1141.

Deutsh, F. R. and P. H. Maserick：“Application of the Hahn–Banach theorem in approximation theory,” *SIAM Rev.*, **9** (1967), 516–530.

Diestel, J.：*Geometry of Banach Spaces, Selected Topics*, Lecture notes in mathematics, #485, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, New York (1975).

Dugundji, J. and A. Granas：*Fixed point theory*, I, Monografie Mathematyczne, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1982).

Dunford, N. and J. T. Schwartz：*Linear Operator*, Part 1, Interscience, New York (1958).

Edelstein, M.：“On fixed and periodic points under contractive mappings,” *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 74–79.

Edelstein, M.：“The construction of an asymptotic center with a fixed-point property,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 206–208.

Ekeland, I.：“Nonconvex minimization problems,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, **1** (1979), 443–474.

Fan, K.：“Minimax theorems,” *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 42–47.

Fan, K.：“On systems of linear inequalities, in ‘Linear Inequalities and Related Systems’,” *Ann. of Math. Stud.*, **38**, 99–156, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1956).

Fan, K.：“Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations,” *Math. Z.*, **68** (1957), 205–217.

Fan, K.：“A generalization of Tychonoff’s fixed point theorem,” *Math. Ann.*, **142** (1961), 305–310.

Fan, K.：“Applications of a theorem concerning sets with convex sections,” *Math. Ann.*, **163** (1966), 189–203.

Fan, K.：“Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder,” *Math. Z.*, **112** (1969), 234–240.

Foguel, S. R.：*The ergodic theory of Markov processes*, Van Nostrand (1969).

Fong, H.：“Weak convergence of semigroups implies strong convergence of weighted averages,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **56** (1976), 157–161.

Glicksberg, I. L.：“A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 170–174.

Goebel, K. and W. A. Kirk：“A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35** (1972), 171–174.

Goebel, K. and S. Reich：“Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings,” *Pure and Applied Math.*, **83**, Marcel dekker, New York (1984).

Göhde, D.：“Über fixedpunkte bei steigen selbstabbildungen mit kompakten iterierten,” *Math. Nachr.*, **27** (1964), 45–55.

Gossez, J. P. and E. Lami Dozo : "Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings," *Pacific J. Math.*, **40** (1972), 563–573.

Granirer, E. : "On amenable semigroups with a finite-dimensional set of invariant means I," *Illinois J. Math.*, **7** (1963), 32–48.

Granirer, E. : "A theorem on amenable semigroups," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **111** (1964), 367–379.

Groetsch, C. W. : "A note on segmenting Mann iterates," *J. Math. Anal. Appl.*, **40** (1972), 369–372.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and G. Pólya : *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, London/New York (1934).

Hartman, P. and G. Stampacchia : "On some nonlinear elliptic differential functional equations," *Acta Math.*, **115** (1966), 271–310.

Hille, E. and R. S. Phillips : "Functional analysis and semigroups," *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **31** (1948), New York.

Hirano, N. : "A proof of the mean ergodic theorems for nonexpansive mappings in Banach space," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **78** (1980), 361–365.

Hirano, N., Kido, K. and W. Takahashi : "The existence of nonexpansive retractions in Banach space," *J. Math. Soc. Japan*, **38** (1986), 1–7.

Hirano, N., Kido, K. and W. Takahashi : "Asymptotic behavior of commutative semigorups of nonexpansive mappings in Banach spaces," *Nonlinear Analysis*, **10** (1986), 229–249.

Hirano, N., Komiya, H. and W. Takahashi, "A generalization of the Hahn–Banach theorem," *J. Math. Anal. Appl.*, 88 (1982), 333–340.

Hirano, N. and W. Takahashi : "Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces," *Kodai Math. J.*, **2** (1979), 11–25.

Hirano, N. and W. Takahashi : "Existence theorems on unbounded sets in Banach spaces," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80** (1980), 647–650.

Hirano, N. and W. Takahashi : "The sets of fixed points of families of affine continuous mappings," *Fund. Math.*, **113** (1981), 33–37.

Hirano, N. and W. Takahashi : "Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space," *Pacific J. Math.*, **112** (1984), 333–346.

Holmes, R. D. and A. T. Lau : "Nonexpansive actions of topological semigroups and fixed points," *J. London Math. Soc.*, **5** (1972), 330–336.

Iseki, K. : "On Banach theorem on contraction mappings," *Proc. Japan. Acad.*, **41** (1965), 145–146.

Iseki, K. : "On common fixed points of mappings," *Bull. Austral. Math. Soc.*, **10** (1974), 365–370.

Ishihara, H. and W. Takahashi : "Fixed point theorems for uniformly lipschitzian semigroups in Hilbert spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, **127** (1987), 206–

210.

Ishihara, H. and W. Takahashi : "Modulus of convexity, characteristic of convexity and fixed point theorems," *Kodai Math. J.*, **10** (1987), 197–208.

Ishikawa, S. : "Fixed points by a new iteration method," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **44** (1974), 147–150.

Itoh, S. and W. Takahashi : "Single-valued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems," *J. Math. Anal. Appl.*, **59** (1977), 514–521.

Itoh, S. and W. Takahashi : "The common fixed point theory of singlevalued mappings and multivalued mappings," *Pacific J. Math.*, **79** (1978), 493–508.

Itoh, S., Takahashi, W. and K. Yanagi : "Variational inequalities and complementarity problems," *J. Math. Soc. Japan*, **30** (1978), 23–28.

Kakutani, S. : "Ergodic theorems and the Markoff process with a stable distribution," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 49–54.

Kakutani, S. : "A generalization of Brouwer's fixed point theorem," *Duke Math. J.*, 8 (1941), 457–459.

Kannai, Y. : "Countably additive measures in cores of games," *J. Math. Anal. Appl.*, **27** (1969), 227–240.

Karamardian, S. : "Generalized complementarity problem," *J. Optimization Theory Appl.*, 8 (1971), 161–168.

Kasahara, S. : "A fixed point theorem for contraction mappings in a uniformly convex normd space," *Proc. Japan Acad.*, **42** (1966), 593–595.

川又邦雄：「景気変動と周期解」『三田学会雑誌』**73** (1980), 93–112.

Kelly, J. L., Namioka, I. et al. : *Linear topological spaces,* Van Nostrand, Princeton, N. J. (1963).

Kido, K. and W. Takahashi : "Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach space," *J. Math. Anal. Appl.*, **103** (1984), 387–394.

Kido, K. and W. Takahashi : "Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems," *J. Math. Anal. Appl.*, **111** (1985), 585–605.

Kijima, Y. and W. Takahashi : "A fixed point theorem for nonexpansive mappings in metric space," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 326–330.

Kijima, Y. and W. Takahashi : "Adjoint ergodic theorems for amenable semigroups of operators," *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ.*, **20** (1973), 1–4.

Kirk, W. A. : "A fixed point theorem for mappings which do not increase distances," *Amer. Math. Monthly*, **72** (1965), 1004–1006.

Kirk, W. A. : "Fixed point theorems for nonlinear nonexpansive and generalized contraction mappings," *Pacific J. Math.*, **38** (1971), 89–94.

Kirk, W. A. and W. O. Ray : "Fixed-point theorems for mappings defined on unbounded sets in Banach spaces," *Studia Math.*, **64** (1979). 127–138.

Kohlberg, E. and A. Neyman : "Asymptotic behavior of nonexpansive mappings in normed linear spaces," *Israel J. Math.*, **38** (1981), 269–275.

Kojima, M.：“Computational methods for solving the nonlinear complementarity problem,” *Keio Eng. Rep.*, **27** (1974), 1-41.

Komiya, H. and W. Takahashi：“Systems of linear inequaliteis on normed linear spaces,” *Linear & Multilinear Algebra*, **13** (1983), 267-279.

Komura, Y.：“Nonlinear semigroups in Hilbert space,” *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 493-507.

高村幸男，小西芳雄：『非線型発展方程式』岩波講座基礎数学，岩波書店 (1977).

König, H.：“On certain applications of the Hahn-Banach and minimax theorems,” *Arch. Math.*, **21** (1970), 583-591.

Krengel, U.：*Ergodic theorems*, Walter de Gruyter (1985).

Kuga, K.：“Brouwer's fixed point theorem; An alternative proof,” *SIAM J. Math. Anal.*, **5** (1974), 893-897.

Lami Dozo, E.：“Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition,” *Proc. Amer. Math.* Soc., **38** (1973), 286-292.

Lau, A. T.：“Invariant means on almost periodic functions and fixed point properties,” *Rockey Mountain J. Math.*, **3** (1973), 69-76.

Lau, A. T.：“Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space,” *J. Math. Anal. Appl.*, **105** (1985), 514-522.

Lau, A. T. and W. Takahashi：“Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings,” *Pacific J. Math.*, **126** (1987), 277-294.

Lim, T. C.：“A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings,” *Pacific J. Math.*, **53** (1974), 487-493.

Lim, T. C.：“A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 1123-1126.

Lim, T. C.：“Characterizations of normal structure,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, **43** (1974), 313-319.

Lim, T. C.：“On asymptotic centers and fixed points of nonexpansive mappings,” *Canad. J. Math.*, **32** (1980), 421-430.

Lomonosov, V. J.：“Invariant subspaces for operators commuting with compact operators,” *Functional Anal. Appl.*, **7** (1973), 55-56.

Lorentz, G. G.：“A contribution to the theory of divergent series,” *Acta Math.*, **80** (1948), 167-190.

Machado, H. V.：*Fixed point theorems for nonexpansive mappings in metric spaces with normal structure. A thesis for the dectorate*, Chicago University (1971).

Markin, J. T.：“A fixed point theorem for set valued mappings,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 639-640.

丸山徹：「可測多価写像の理論—基礎と応用をめぐる総合報告—」『三田学会雑誌』**73** (1980), 113-159.

Mazur, S. and W. Orlicz : "Sur les espaces métriques lineáres (II)," *Studia Math.*, **13** (1953), 137–179.

Minty, G. J. : "On the monotonicity of the gradient of a convex function," *Pacific J. Math.*, **14** (1967), 243–247.

Mitchell, T. : "Function algebras, means, and fixed points," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **130** (1968), 117–126.

Mitchell, T. : "Fixed points of reversible semigroups of nonexpansive mappings," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **22** (1970), 322–323.

宮寺功 :『非線形半群』紀伊国屋書店 (1977).

Miyadera, I. : "Asymptotic behavior of iterates of nonexpansive mappings in Banach spaces," *Proc. Japan Acad.*, **54** (1978), 212–214.

Miyadera, I. and K. Kobayashi : "On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces," *Nonlinear Analysis*, **6** (1982), 349–365.

Mizoguchi, N. and W. Takahashi : "Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces," to appear in *J. Math. Anal. Appl.*.

More, J. J. : "Coercivity conditions nonlinear complementarity problems," *SIAM Rev.*, **16** (1974), 1–16.

Moroşanu, G. : "Asymptotic behaviour of solutions of differenital equations associated to monotone operators," *Nonlinear Analysis*, **3** (1979), 873–883.

Nagel, R. J. : "Ergodic and mixing properties of linear operators," *Proc. R. I. A.*, **74** (1974), 245–261.

Nakamura, Y. : "Measure-theoretic construction for information theory," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 133–150.

Namioka, I. : "Partially ordered linear topological spaces," *Mem. Amer. Math. Soc.*, **24** (1957).

Nevanlinna, O. and S. Reich : "Strong convergence of contraciton semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces," *Israel J. Math.*, **32** (1979), 44–57.

Neveu, J. : "Existence of bounded invariant measures in ergodic theory," *Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics* **11**, *Part* 2 (1967), 461–472.

西村和雄 :「不動点定理と一般均衡理論 : 最近の発展」『京大数理解析研講究録』No. 478 (1983), 160–166.

Okochi, H. : "Asymptotic strong convergence of nonlinear contraction semigroups," *Tokyo J. Math.*, **5** (1982), 171–182.

Opial, Z. : "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 591–597.

Pazy, A. : "Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space," *Israel J. Math.*, **9** (1971), 235–240.

Pazy, A. : "On the asymptotic behavior of iterates of nonexpansive mappings in Hilbert space," *Israel J. Math.*, **26** (1977), 197–204.

Pazy, A. : "On the asymptotic behavior of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space," *J. Funct. Anal.*, **27** (1978), 292–307.

Phelps, R. P. : "Convex sets and nearest points," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 790–797.

Phelps, R. P. : *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand (1966).

Prüß. J. : "A characterization of uniform convexity and applications to accretive operators," *Hiroshima Math. J.*, **11** (1981), 229–234.

Ray, W. O. : "The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258** (1980), 531–537.

Reich, S. : "Nonlinear evolution equations and nonlinear ergodic theorems," *Nonlinear Analysis*, **1** (1977), 319–330.

Reich, S. : "Extension problems for accretive sets in Banach spaces," *J. Funct. Anal.*, **26** (1977), 378–395.

Reich, S. : "Almost convergence and nonlinear ergodic theorems," *J. Approximation theory*, **24**(1978), 269–272.

Reich, S. : "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, **67** (1979), 274–276.

Reich, S. : "Product formula, nonlinear semigroups, and accretive operators," *J. Funct. Anal.*, **36** (1980), 147–168.

Reich, S. : "Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 287–292.

Reich, S. : "On the asymptotic behavior of nonlinear semigroups and the range of accretive operators," *J. Math. Anal. Appl.*, **78** (1981), 113–126.

Reich, S. : "On the asymptotic behavior of nonlinear semigroups and the range of accretive operators II," *J. Math. Anal. Appl.*, **87** (1982), 134–146.

Reich, S. : "The almost fixed point property for nonexpansive mappings," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88 (1983), 44–46.

Roberts, J. W. : "Invariant measures in compact Hausdorff spaces," *Indiana Univ. Math. J.*, **24** (1975), 691–718.

Rockafellar, R. T. : *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton N. J. (1969).

Rockafellar, R. T. : "On the maximal monotonicity of subdifferential mappings," *Pacific J. Math.*, **33** (1970), 209–216.

Rockafellar, R. T, : "Monotone operators and the proximal point algorithm," *SIAM J. Control Optim.*, **14** (1976), 877–898.

Rodé, G. : "An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space," *J. Math. Anal. Appl.*, **85** (1982), 172–178.

Ryff, J. V. : "Orbits of L^1-functions under doubly stochastic transformations," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), 92–100.

Sakai, K. : "Extremely amenable transformation semigroups," *Proc. Japan Acad.*, **49**(1973), 424–427.

Sakamaki, K. and W. Takahashi : "Systems of convex inequalities and their applications," *J. Math. Anal. Appl.*, **70** (1979), 445–459.

Sato, R. : "On the existence of positive invariant functions for semigroups of operators," *Tohoku Math. J.*, **27** (1975), 187–196.

佐藤亮太郎 :「線形作用素の個別エルゴード定理」『数学』**29** (1977), 1–13.

Schaefer, H. H. : *Topological vector space*, Macmillan, New York (1966).

Schaefer, H. H. : "Invariant ideals of positive operators in $C(X)$," *Illinois J. Math.*, **11** (1967), 703–715.

Schaefer, H. H. : "Invariant ideals of positive operators in C(X)," *Illinois J. Math.*, **12** (1968), 525–538.

Schmeidler, D. : *On Balanced Games with Infinitely Many Players*, Research Program in Game Theory and Mathematical Economics, RM 28, The Hebrew University of Jerusalem (1967).

Schmeidler, D. : "Cores of Exact games I," *J. Math. Anal. Appl.*, **40** (1972), 214–225.

Shioji, N. and W. Takahashi : "Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications," to appear in *J. Math. Anal. Appl.*.

Simons, S. : "Minimax and variational inequalities. Are they of fixed point or Hahn–Banach type?," *Game Theory and Mathematical Economices*, North Holland Publishing Company (1981), 379–387.

Simons, S. : "Two-function theorems and variational inequalities for functions on compact and noncompact sets, with some comments on fixed point theorems," *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, American Mathematical Society, **45** (1986), 377–392.

Sine, R. : "Geometric theory of a single Markov operator," *Pacific J. Math.*, **27** (1968), 155–166.

Sion, M. : "On general minimax theorems," *Pacific J. Math.*, 8(1958), 171–176.

Smart, D. R. : *Fixed point theorems*, Cambridge University Press (1974).

鈴木光男, 武藤滋夫 :『協力ゲームの理論』東京大学出版会 (1985).

Takahashi, M. and W. Takahashi : "Separation theorems and minimax theorems for fuzzy sets," *J. Optimization Theory & Applications*, **31** (1980), 179–194.

Takahashi, W. : "Fixed point theorem for amenable semigroups of nonexpansive mappings," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 383–386.

Takahashi, W. : "A convexity in metric space and nonexpansive mappings I," *Kōdai Math. Sem. Rep,*, **22** (1970), 142–149.

Takahashi, W. : "On amenable semigroups of positive contractions on L^1-space," *8th Functional Analysis Symposium* (1970), 68–81.

Takahashi, W. : "Invariant ideals for amenable semigroups of Markov operators," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **23** (1971), 121–126.

Takahashi, W. : "Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L^1," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **23** (1971), 131–143.

Takahashi, W.: "Ergodic theorems for amenable semigroups of positive contractions on L^1," *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ.*, **19** (1972), 5–11.

高橋渉：「不動点定理をめぐる最近の結果」『数学』28 (1976), 236–247.

Takahashi, W.: "Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems," *J. Math. Soc. Japan*, 28 (1976), 168–181.

Takahashi, W.: "Existence theorems and positive operators,"『京大数理解析研講究録』No. 290 (1977), 57–75.

Takahashi, W.: "Some fixed point theorems and their applications,"『京大数理解析研講究録』No. 299 (1977), 71–92.

Takahashi, W.: "Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities," *J. Optimization Theory & Applications*, **24** (1978), 493–508.

高橋渉：「不動点定理とその周辺」『三田学会雑誌』**73** (1980), 32–68.

Takahashi, W.: "A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81** (1981), 253–256.

Takahashi, W.: "Recent results in fixed point theory," *SEA Bull. Math.*, **4** (1981), 59–85.

Takahashi, W.: "Fixed point theorems in Nonlinear Analysis,"『京大数理解析研講究録』No. 428 (1981), 70–92.

高橋渉：「不動点定理の現状」『京大数理解析研講究録』No. 478 (1983), 133–159.

Takahashi, W.: "Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets," *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 543–553.

Takahashi, W.: "Nonlinear ergodic theorems and their applications,"『京大数理解析研講究録』No. 559 (1985), 78–101.

高橋渉：「不動点定理とエルゴード定理(現代における数学と経済学の試み)」『日本交通政策研究会』A–94 (1985), 1–14.

Takahashi, W.: "The asymptotic behavior of nonlinear semigroups and invariant means," *J. Math. Anal. Appl.*, **109** (1985), 130–139.

Takahashi, W.: "Fixed point, Minimax, and Hahn–Banach theorems," *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, American Mathematical Society, **45** (1986), 419–427.

Takahashi, W.: "A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space," *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97** (1986), 55–58.

Takahashi, W.: "Nonlinear semigroups and invariant means,"『京大数理解析研講究録』No. 604 (1987), 277–294.

高橋渉, 平野載倫：「非線形函数解析学における最近の話題—非線形エルゴード定理について—」『数学』**33** (1981), 50–65.

Takahashi, W. and J. Y. Park: "On the asymptotic behavior of almost-orbits of commutative semigroups in Banach spaces," *Nonlinear and Convex Analysis*, Marcel Dekker, Inc. (1987), 271–293.

Takahashi, W. and Y. Ueda : "On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators," *J. Math. Anal. Appl.*, **104** (1984), 546–553.

Takahashi, W. and P. J. Zhang : "The closedness-property and the pseudo-A-properness of accretive operators," to appear in *J. Math. Anal. Appl.*.

田辺広城：『発展方程式』岩波書店 (1975).

Terkelsen, F. : "Some minimax theorems," *Math. Scand.*, **31** (1972), 405–413.

Umegaki, H. : "Representation and extremal properties of averaging operators and their applications to information channels," *J. Math. Anal. Appl.*, **25** (1969). 41–74.

Umegaki, H. and W. Takahashi : "A generalization of Goebel and Kirk's fixed point theorem," *Sci. Rep. Yokohama National Univ.*, **21** (1974), 1–4.

Webb, J. R. L. : "On a property of duality mappings and the A-properness of accretive operators," *Bull. London Math. Soc.*, **13** (1981), 235–238.

Webb, J. R. L. : "Mappings of accretive and pseido-A-proper type," *J. Math. Anal. Appl.*, **85** (1982), 146–152.

Weiss, M. D. : "Fixed points, separation, and induced topologies for fuzzy sets," *J. Math. Anal. and Appl.*, **56** (1975), 142–150.

Yen, C. L. : "A minimax inequality and its applications to variational inequlities," *Pacific J. Math.*, **97** (1981), 477–481.

Yoshida, K. : "Mean ergodic theorem in Banach spaces," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 292–294.

Yoshida, K. : *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1974).

問題の略解

問　題 1.1

1.　$\boldsymbol{E}=\{K$: K は空でない閉集合で $f(K)\subset K\}$ とし，$\boldsymbol{E}$ は包含関係で順序が入っているものとする．$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{E}$ の鎖としよう．そうすると，$\boldsymbol{B}$ は有限交叉性を満たす．X はコンパクトであるから $K_0=\cap\{B$: $B\in\boldsymbol{B}\}\neq\phi$ である．よって，K_0 は空でない閉集合で，

$$f(K_0)=f(\bigcap_{B\in\boldsymbol{B}}B)\subset\bigcap_{B\in\boldsymbol{B}}f(B)\subset\bigcap_{B\in\boldsymbol{B}}B=K_0$$

である．よって K_0 は $\boldsymbol{E}$ の元である．$\boldsymbol{B}$ のすべての元 B に対して，$B\supset K_0$ より $\boldsymbol{B}$ は下界をもつことになる．ここで Zorn の補題を用いると，$\boldsymbol{E}$ は極小元をもつことになる．

2.　縮小写像の不動点定理より，$f^n(x_0)=x_0$ となる点 x_0 がただ 1 つ存在する．これから $f^n(f(x_0))=f(f^n(x_0))=f(x_0)$ となり，$f(x_0)$ も f^n の不動点である．f^n の不動点は一意であるから $f(x_0)=x_0$ となり，x_0 は f の不動点でもある．f が x_0 と異なる不動点をもてば，f^n も異なる不動点をもつことになり，これは f^n がただ 1 つの不動点をもつことに反する．

3.　自然数 n に対して $d(Tx_n,x_n)<\dfrac{1}{n}$ となるような点を x_n とすると，$\{Tx_n\}$ は K の点列となる．K はコンパクトであるから，$Tx_{n_i}\to y\in K$ となるような部分点列 $\{x_{n_i}\}$ が存在する．

$$d(y,x_{n_i})\leqq d(y,Tx_{n_i})+d(Tx_{n_i},x_{n_i})\to 0$$

であるから，$x_{n_i}\to y$ である．よって $Ty=\lim Tx_{n_i}=y$ である．

4.　（1）が必要条件であることは明らか．逆に，Y の任意の開集合を G としよう．$\boldsymbol{B}$ は Y の開基底であることより，$G=\bigcup_\alpha B_\alpha$ とかけるから

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$$

である．仮定より $f^{-1}(B_\alpha)$ は開集合なので，$f^{-1}(G)$ は開集合となる．（2）の場合も同様である．

5.　X を有界な完備距離空間とし，f をその上の縮小写像とする．$X_0=X$, $X_1=\overline{f(X)}$, $X_2=\overline{f^2(X)},\cdots,X_n=\overline{f^n(X)},\cdots$ とする．ただし，$\bar{A}$ は A の閉包を表す．このとき $\{X_n\}$ は X の空でない閉集合の減少列である．また，$x,y\in X$ に対して

$$d(f^n(x),f^n(y))\leqq r^n d(x,y)$$

であるので，X_n の直径 $\delta(X_n)$ は 0 に収束する．よって Cantor の定理より，$\bigcap_{n=0}^{\infty}X_n=\{x_0\}$ となる．$f(\{x_0\})=f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}X_n\right)\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}f(X_n)\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}X_{n+1}=\{x_0\}$ であるので $f(x_0)=x_0$ である．f の不動点が一意であることは定理 1.1.3 の証明と同じである．

問　題 1.2

1.　$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ とする．このとき，$f\in E^*$ に対して，$f(x_n)\to f(x_0)$ であるので，$f(X)=\{f(x_n)\}$ は有界である．よって，定理 1.2.7 より，$\{x_n\}$ は有界点列となる．

2.　強位相は弱位相より強いから，弱位相で閉集合であれば，強位相で閉集合となる

から，その逆を示せばよい．C を閉凸集合とし，$\{x_\alpha\}$ を C の元からなるネットで，x に弱収束するとしよう．$x \notin C$ とすると，分離定理(定理 1.2.5) より，$f(x) < \inf\{f(y) : y \in C\}$ となるような $f \in E^*$ が存在する．$M = \inf\{f(y) : y \in C\}$ とすると，$f(x) < M \leqq f(x_\alpha)$ となる．$f(x_\alpha) \to f(x)$ であるから，$f(x) < M \leqq f(x)$ となり矛盾である．よって $x \in C$ であり，C は弱位相で閉集合である．

3.　$z \in E$ とする．このとき，$S(x) = Tx - z$ $({}^\forall x \in E)$ とすると，S は E から E への縮小写像である．E は完備なので，$S(u) = u$ となる $u \in E$ が一意に存在する．すなわち，$Tu - z = u$ となる $u \in E$ が一意に存在する．

$$\|Tx - Ty\| \leqq r\|x - y\| \qquad ({}^\forall x, y \in E)$$

とする．また，$Tu - u = z$，$Tv - v = w$ とする．このとき，

$$\|u - v\| = \|Tu - z - (Tv - w)\| \leqq r\|u - v\| + \|z - w\|$$

より，$(1-r)\|u - v\| \leqq \|z - w\|$ である．よって

$$\|(T-I)^{-1}z - (T-I)^{-1}w\| = \|u - v\| \leqq \frac{1}{1-r}\|z - w\|$$

である．だから，$(T-I)^{-1}$ は一様連続である．

4.　Bishop–Phelps の定理(定理 1.2.8)において，有界な閉凸集合を $B = \{x \in E : \|x\| \leqq 1\}$ とする．このとき，$f \in S(E^*)$ に対して，B 上で最大値をとる関数列 $\{g_n\} \subset E^*$ で，$\|g_n - f\| \to 0$ となるものがとれる．しかも

$$\|g_n\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |g_n(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |g_n(x)|$$

であるから，$g_n(x_n) = \|g_n\|$ で，しかも $x_n \in S(E)$ となるものがとれる．いま $f_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|}$ とすると，$\|f_n\| = 1$ であり，$f_n(x_n) = 1$ である．また，

$$\begin{aligned}\|f - f_n\| &= \left\| f - \frac{g_n}{\|g_n\|} \right\| = \frac{1}{\|g_n\|} \Big\| \|g_n\| f - g_n \Big\| \\ &\leqq \frac{1}{\|g_n\|} \{\|g_n\| \|f - g_n\| + | \|g_n\| - 1 | \|g_n\|\} \to 0\end{aligned}$$

でもあるから問題は解けたことになる．

問　題 1.3

1.　$g(x) = \|x\|$ $({}^\forall x \in E)$ とすると，g は E 上の連続な凸関数になる．だから，g は弱位相で下半連続である．よって，定理 1.3.2 より，$x_n \rightharpoonup x_0$ ならば，$\|x_0\| \leqq \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\|$ である．$h(f) = \|f\|$ $({}^\forall f \in E^*)$ に対して，h は弱*位相で下半連続なので，後半も同様にいえる．

2.　略．

3.　$\alpha + \beta = 1$ となる $\alpha, \beta \geqq 0$ に対して，$z_1, z_2 \in C$ ならば

$$\begin{aligned}g(\alpha z_1 + \beta z_2) &= \|x - (\alpha z_1 + \beta z_2)\| = \|\alpha x + \beta x - (\alpha z_1 + \beta z_2)\| \\ &\leqq \alpha\|x - z_1\| + \beta\|x - z_2\| = \alpha g(z_1) + \beta g(z_2)\end{aligned}$$

である．また，$z_1 \in C$，$z_2 \notin C$ と $z_1, z_2 \notin C$ の場合も

$$g(\alpha z_1 + \beta z_2) \leqq \alpha g(z_1) + \beta g(z_2)$$

を証明できる．$g(z)$ が下半連続となることは明らか．

4.　3 と同様にして，任意の i に対して，

$$\|x_i - (\alpha z_1 + \beta z_2)\| \leqq \alpha\|x_i - z_1\| + \beta\|x_i - z_2\|$$

となる．この両辺の上極限をとることによって，$g(\alpha z_1 + \beta z_2) \leqq \alpha g(z_1) + \beta g(z_2)$ を得る．

また，$\|x_i-x\|-\|x_i-y\|\leqq\|x-y\|$ より $g(x)-g(y)\leqq\|x-y\|$ となる．同様に，$g(y)-g(x)\leqq\|x-y\|$ である．よって $|g(x)-g(y)|\leqq\|x-y\|$ となり，g が E 上で連続である．

5. $g(x)=x^2$ ($x\in \boldsymbol{R}$) が凸関数であることを使えば，4 と同様である．

6. 問題 1.1.4 を使えば明らか．

7, 8, 9 は§1.3 を参照．

問 題 1.4

1. $g(x)=d(x, Tx)$ ($^\forall x\in X$) とすると，$x,y\in X$ に対して

$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)|&=|d(x, Tx)-d(y, Ty)|\\&\leqq|d(x, Tx)-d(Tx, y)|+|d(Tx, y)-d(y, Ty)|\\&\leqq d(x,y)+d(Tx, Ty)\leqq 2d(x,y)\end{aligned}$$

であるから $g(x)$ は X で連続である．定理 1.3.1 より $d(z, Tz)=\min_{x\in X} d(x, Tx)$ となる $z\in X$ が存在する．$Tz\neq z$ とすると，$d(T^2z, Tz)<d(z, Tz)$ であるから，$d(z, Tz)=\min_{x\in X} d(x, Tx)$ に反する．

2. $$d(Tx, Ty)\leqq rd(x,y) \qquad (^\forall x,y\in X)$$

とし，$g(x)=d(x, Tx)$ ($^\forall x\in X$) とすると，1 の方法によって g は連続である．また，$F(x)=\dfrac{1}{1-r}g(x)$ とすると

$$(1-r)d(x, Tx)=d(x, Tx)-rd(x, Tx)\leqq d(x, Tx)-d(Tx, T^2x)$$

である．よって $d(x, Tx)\leqq F(x)-F(Tx)$ ($^\forall x\in X$) となる．Caristi の不動点定理より，T は X の中に不動点をもつ．

3. Ekeland の定理で $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ とおくと，すべての $x\in X$ に対して

$$F(x)\geqq F(x_0)-\frac{1}{2}d(x, x_0) \qquad (*)$$

となる $x_0\in X$ が存在する．一方仮定より，この x_0 に対して，

$$F(y)+d(x_0, y)\leqq F(x_0) \qquad (**)$$

となる $y\in T(x_0)$ が存在する．(*) で $x=y$ とおき，(*), (**) を使うと $x_0=y$ を得る．よって $x_0\in T(x_0)$．

4. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，$d(x,c)<d(x,C)+\varepsilon$ となる $c\in C$ が存在する．よって

$$d(x,B)-d(x,C)\leqq d(x,b)-d(x,c)+\varepsilon\leqq d(b,c)+\varepsilon \qquad (^\forall b\in B)$$

となる．だから

$$d(x,B)-d(x,C)\leqq d(c,B)+\varepsilon\leqq\delta(C,B)+\varepsilon\leqq H(C,B)+\varepsilon.$$

ε は任意だから $d(x,B)-d(x,C)\leqq H(C,B)$ である．同様に

$$d(x,C)-d(x,B)\leqq H(C,B)$$

でもある．よって，$|d(x,B)-d(x,C)|\leqq H(B,C)$．

5. $x,y\in X$ とすると

$$\begin{aligned}|d(x, Tx)-d(y, Ty)|&\leqq|d(x, Tx)-d(y, Tx)+d(y, Tx)-d(y, Ty)|\\&\leqq d(x,y)+H(Tx, Ty)\\&\leqq d(x,y)+d(x,y)=2d(x,y)\end{aligned}$$

であるから，$g(x)=d(x, Tx)$ は連続である．

問 題 1.5

1. $(1°)\Longrightarrow(2°)$ であることは，定理 1.5.1 の証明 (1)$\Longrightarrow$(2) の前半より明らかで

ある．また，(2°)⟹(1°) であることは，やはり定理1.5.1の証明（1）⟹（2）の後半より，(2°) が定理1.5.1の（2）を意味し，それは（1）を意味することからわかる．(3°)⟹(1°)：$\|f\|=1$ とするならば，$-1\leqq f\leqq 1$ となる．よって (3°) の仮定より，$-\mu(1)\leqq\mu(f)\leqq\mu(1)$ である．これは $|\mu(f)|\leqq\mu(1)$ を意味する．よって，$1=\|\mu\|=\sup_{\|f\|=1}|\mu(f)|\leqq\mu(1)$ なので，$1\leqq\mu(1)$ である．一方

$$1=\|\mu\|=\sup_{\|f\|=1}|\mu(f)|\geqq\mu(1)$$

であるから，$\mu(1)=1$ が証明された．(2°)⟹(3°)：(2°) は (1°) を意味し，(1°) は定理1.5.1の（2）を意味する．よって定理1.5.1の証明（2）⟹（1）の方法により，$\|\mu\|=1$ であることがわかる．

2.　$x,y\in X$ とし，α,β をスカラーとすると，$n=1,2,\cdots$ に対して，

$$z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+\beta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

であるから，$\{z_n\}$ は収束する．よって $\alpha x+\beta y\in X$ となり，X は線形空間である．$\mu(1)=1$ となることは明らかである．また

$$|\mu(x)|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqq\|x\|$$

であるから，$\|\mu\|=1$ であることもわかる．

3.　$x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^\infty$ とし，$y=(x_2,x_3,\cdots)$ とすると

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)=\frac{1}{n}(x_{n+1}-x_1)\to 0\qquad(n\to\infty)$$

であるから，$y-x\in X$ であり，$\mu(y-x)=0$．よって，μ を Hahn–Banach の定理によって l^∞ 上に拡張し，それを μ_0 とすると，$\mu_0(x)=\mu_0(y)$ となり，μ_0 は Banach limit になることがわかる．

4.　$P=\frac{1}{2}(T_1+T_2)$ のとき，$F(P)=F(T_1)\cap F(T_2)$ を示せばよい．$F(P)$ はコンパクトで凸集合であるので，$F(P)$ の端点 x が存在する．

$$T_1x=T_1Px=PT_1x$$

であるので，$T_1x\in F(P)$ である．同様にして $T_2x\in F(P)$ である．また，

$$x=Px=\frac{1}{2}(T_1x+T_2x),\quad x\in\text{ex}\,F(P)$$

なので，$x=T_1x=T_2x$ である．よって，$\text{ex}\,F(P)\subset F(T_1)\cap F(T_2)$ となる．だから $F(P)\subset F(T_1)\cap F(T_2)$ である．逆は明らか．

5.　$x_n-y_n\to 0$ なので，定理1.5.4より $\mu_n(x_n-y_n)=0$ である．よって，$\mu_n(x_n)=\mu_n(y_n)$ である．

問　題 2.1

1.　$y_n\to y_0$ ならば $\{y_n\}$ は有界なので，$n\to\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x_0,y_0)|&\leqq|(x_n-x_0,y_n)-(x_0,y_0-y_n)|\\&\leqq\|x_n-x_0\|\|y_n\|+|(x_0,y_0-y_n)|\to 0\end{aligned}$$

となる．よって，$x_n\to x_0$，$y_n\to y_0$ ならば $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ となる．

2.　（i）　平行四辺形公式より，

$$2\|x-y_m\|^2+2\|x-y_n\|^2=\|2x-y_m-y_n\|^2+\|y_m-y_n\|^2$$

$$=4\left\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\right\|^2+\|y_m-y_n\|^2$$

である．$\frac{1}{2}(y_m+y_n)\in C$ であることに注意し，$d(x,C)=d$ とすると，上式は $m,n\to\infty$ のとき，

$$\|y_m-y_n\|^2\leqq 2\|x-y_m\|^2+2\|x-y_n\|^2-4d^2$$
$$\to 2d^2+2d^2-4d^2=0$$

である．よって $\{y_n\}$ は Cauchy 列である．

（ii） H は完備であるから，$y_n\to y_0$ となる C の点 y_0 が存在するが，

$$\|x-y_0\|=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d(x,C)$$

であるから，y_0 は $\|x-y_0\|=d(x,C)$ を満たす．

3. $x_n=T^nx$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると，定理 2.1.1 より，

$$g(z_0)=\min_{z\in C}\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^nx-z\|=r$$

となる $z_0\in C$ が一意に存在することがわかる．この z_0 に対して，$Tz_0\in C$ を考えると，

$$g(Tz_0)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^nx-Tz_0\|\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T^{n-1}x-z_0\|=g(z_0)=r$$

である．よって $g(Tz_0)=r$ となる．だから $Tz_0=z_0$ である．

4. $y\in H$ に対して，$g(y)=\mu_n(x_n,y)$ とすると，g は H 上の線形汎関数である．また，

$$|g(y)|=|\mu_n(x_n,y)|\leqq\|\mu\|\sup_n|(x_n,y)|=\sup_n|(x_n,y)|$$
$$\leqq(\sup_n\|x_n\|)\|y\|$$

なので，g は有界でもある．だから Riesz の定理によって，

$$\mu_n(x_n,y)=(x_0,y)\qquad({}^\forall y\in H)$$

となる $x_0\in H$ が存在する．

5. $x_0\notin C$ とする．このとき，分離定理より

$$(x_0,y_0)<\inf\{(z,y_0):\ z\in C\}$$

となる $y_0\in H$ が存在する．だから

$$\mu_n(x_n,y_0)=(x_0,y_0)<\inf\{(z,y_0):\ z\in C\}$$
$$\leqq\inf\{(x_n,y_0):\ n=1,2,\cdots\}\leqq\mu_n(x_n,y_0)$$

となり矛盾を得る．よって $x_0\in C$ である．

6. z_0 の存在は定理 1.3.10 を用いればよい．$x\in C$ と $0<\lambda<1$ に対して

$$\|x_n-(\lambda x+(1-\lambda)z_0)\|^2=\|x_n-z_0\|^2+2\lambda(x_n-z_0,z_0-x)+\lambda^2\|z_0-x\|^2$$
$$=(1-\lambda)\|x_n-z_0\|^2+\lambda\|x_n-x\|^2-\lambda(1-\lambda)\|z_0-x\|^2$$

であるので，上式に Banach limit μ をとると

$$g(z_0)\leqq g(\lambda x+(1-\lambda)z_0)\leqq(1-\lambda)g(z_0)+\lambda g(x)-\lambda(1-\lambda)\|z_0-x\|^2$$

となる．よって，$g(z_0)\leqq g(x)-(1-\lambda)\|z_0-x\|^2$ となる．ここで，$\lambda\to 0$ とすると $g(z_0)\leqq g(x)-\|z_0-x\|^2$ となり，z_0 の一意性がわかる．

問　題 2.2

1. T_n の不動点を x_n とすると，$\{Tx_n\}$ は有界であるので，

$$\|x_n-Tx_n\|=\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)Tx_n+\frac{1}{n}x_0-Tx_n\right\|$$
$$=\frac{1}{n}\|Tx_n-x_0\|\to 0$$

となる．

2.　$\{x_n\}$ は C の点列なので有界点列である．よって弱収束する部分点列 $\{x_{n_i}\}$ をもつ．$x_{n_i}\rightharpoonup x_0$ とする．また 1 より $x_{n_i}-Tx_{n_i}\to 0$ である．よって，補助定理 2.2.5 を使って $(I-T)x_0=0$ である．すなわち $x_0=Tx_0$ である．

3.　（1）から（2）は明らかである．（2）$\Longrightarrow$（1）を証明する．$F(T)\neq\phi$ とし，$T^{n_i}x\to p$ とする．このとき，$p\in F(T)$ であるので，$n>n_i$ とすると，

$$\|T^nx-p\|=\|T^{n_i+m}x-T^mp\|\leqq\|T^{n_i}x-p\| \qquad (\text{ただし，} n=n_i+m)$$

となり，$T^nx\to p$ であることがわかる．

問　題 2.3

1.　C を線形的に有界でない閉凸集合とすると，$C_0=\{u+tv\colon\ t\geqq 0\}\subset C$ となる $u,v\in H$ $(v\neq 0)$ が存在する．いま C_0 上の写像 S を

$$S(u+tv)=u+(1+t)v \qquad (t\geqq 0)$$

とし，P を C から C_0 への距離射影とする．このとき，$T=SP$ は C から C への nonexpansive 写像で，$F(T)=\phi$ となる．

2.　$w,w'\in K_0$ とすると，

$$\begin{aligned}\|F(w)-F(w')\|^2&=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}(w,e_j)e_{j+1}-\sum_{j=1}^{\infty}(w',e_j)e_{j+1}\right\|^2\\&=\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\{(w,e_j)-(w',e_j)\}e_{j+1}\right\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|(w-w',e_j)|^2\\&=\|w-w'\|^2.\end{aligned}$$

3.　$K=\overline{\mathrm{co}}\{ne_n\colon\ n=1,2,\cdots\}$ とする．いま，K が線形的に有界でないとすると K の相異なる元 x,y があって，

$$x+t(y-x)\in K \qquad ({}^\forall t\geqq 0)$$

となる．$x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)$ とすると，$x+t(y-x)\in K$ より，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(t)=1$ でかつ $\lambda_n(t)\geqq 0$ $(n=1,2,\cdots)$ となる実数列 $\{\lambda_n(t)\}$ があって

$$\left\|x+t(y-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(t)ne_n\right\|^2<1$$

とすることができる．だから

$$|x_n+t(y_n-x_n)-\lambda_n(t)n|^2<1 \qquad ({}^\forall t\geqq 0,\ n=1,2,\cdots)$$

である．仮定より $y\neq x$ であるから $y_n\neq x_n$ となる n が存在する．この n に対して

$$t|y_n-x_n|\leqq\lambda_n(t)n+|x_n|+1\leqq n+|x_n|+1 \qquad ({}^\forall t\geqq 0)$$

である．よって $y_n=x_n$ となり，これは矛盾である．

問　題 2.4

1.　反射律 $a\leqq a$ と推移律 $a\leqq b, b\leqq c\Longrightarrow a\leqq c$ を満たすことは明らかである．

a,b に対して上界 c の存在を示す．S が left reversible であるから，$\overline{aS}\cap\overline{bS}\neq\phi$ より，$c\in\overline{aS}\cap\overline{bS}$ となる $c\in S$ が存在する．だから，$as_\alpha\to c$，$bs_\beta\to c$ となるネット $\{s_\alpha\}$，$\{s_\beta\}$ がとれる．よって，任意の $s\in S$ に対して，$as_\alpha s\to cs$，$bs_\beta s\to cs$ となるので，$cs\in\overline{aS}\cap\overline{bS}$ となる．$s\in S$ は任意であるので $cS\subset\overline{aS}\cap\overline{bS}$ となり，$\overline{cS}\subset\overline{aS}\cap\overline{bS}$ を得る．ゆえに，

$$\{c\}\cup\overline{cS}\subset\{a\}\cup\overline{aS},\quad \{c\}\cup\overline{cS}\subset\{b\}\cup\overline{bS}$$

となる．これは任意の $a,b\in S$ に対して，$a\leqq c$，$b\leqq c$ となる $c\in S$ の存在を意味する．

2.　問題 1.3.4 を参照．

3. 定理 2.1.1 の証明を参照.

4. (i) 定理 2.1.6 より, $F(T)$ は空でない閉凸集合である. (ii) 数学的帰納法により証明する. $F(T_{\alpha_1})\cap F(T_{\alpha_2})\cap\cdots\cap F(T_{\alpha_{n-1}})=F\neq\phi$ としよう. このとき, $z\in F$ ならば $T_{\alpha_i}T_{\alpha_n}z=T_{\alpha_n}T_{\alpha_i}z=T_{\alpha_n}z$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ である. よって, $T_{\alpha_n}z\in F$ となる. これは T_{α_n}: $F\to F$ を意味する. 系 2.1.7 より $T_{\alpha_n}u=u$ となる $u\in F$ が存在する. だから $\bigcap_{i=1}^{n}F(T_{\alpha_i})\neq\phi$ である. (iii) C は弱コンパクトであり, $\{F(T_\alpha):\ \alpha\in I\}$ は有限交叉性をもつ空でない閉凸集合(弱位相で閉集合)であるので, $\bigcap_{\alpha\in I}F(T_\alpha)\neq\phi$ となる. よって 4 は証明された.

問 題 2.5

1. $s\to\infty_R$ ならば $f(s)\to c$ ということは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, ある $w\in S$ が存在して, すべての $t\in S$ に対して, $|f(tw)-c|<\varepsilon$ ということである. これは, ある $w\in S$ が存在して, $f(tw)<c+\varepsilon$ $({}^\forall t\in S)$, $c-\varepsilon<f(tw)$ $({}^\forall t\in S)$ ということである. よって $\inf_w\sup_t f(tw)\leqq c+\varepsilon$, $c-\varepsilon\leqq\sup_w\inf_t f(tw)$ である. $\varepsilon>0$ は任意であるから, $\inf_w\sup_t f(tw)\leqq c\leqq\sup_w\inf_t f(tw)$ である.

$$\sup_w\inf_t f(tw)\leqq\inf_w\sup_t f(tw)$$

は明らかであるから, $\sup_w\inf_t f(tw)=\inf_w\sup_t f(tw)=c$ である. 逆は省略.

2.
$$f(ts)\leqq f(s)\qquad({}^\forall t,s\in S)$$

より, 任意の $w\in S$ に対して, $\inf_s\sup_t f(ts)\leqq f(w)$. よって

$$\inf_s\sup_t f(ts)\leqq\inf_w f(w).$$

逆に, $\inf_w f(w)\leqq f(ts)$ $({}^\forall t,s\in S)$ であるから, $\inf_w f(w)\leqq\sup_s\inf_t f(ts)$ となる. よって 1 を用いて, 補助定理 2.5.2 が証明できる.

3. $\mu_\alpha\in M$ で $\mu_\alpha\xrightarrow{w^*}\mu$ とする. このとき, $\mu(1)=\lim_\alpha\mu_\alpha(1)=1$ である. また, 問題 1.3.1 より, $\|\mu\|\leqq\varliminf_\alpha\|\mu_\alpha\|=1$ である. よって $\mu(1)=\|\mu\|=1$ である. だから $\mu\in M$ となり, M は弱*位相で閉集合である.

4. 定理 2.5.4 の (i), (ii) により, 任意の $s\in S$ に対して

$$Qx=QT_sx\in\overline{\mathrm{co}}\{T_tT_sx:\ t\in S\}=\overline{\mathrm{co}}\{T_{ts}x:\ t\in S\}$$

である. よって $Qx\in\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_{ts}x:\ t\in S\}$ である.

問 題 2.6

1. $x_n=T^nx$ とすると, 問題 2.1.6 より, M_μ はただ 1 点からなる. また, $\{u\}=M_\mu$ とすると,

$$\mu_n\|T^nx-Tu\|^2=\mu_n\|T^{n+1}x-Tu\|^2\leqq\mu_n\|T^nx-u\|^2$$

であるから, $Tu=u$ である. そこで $\lim_{n\to\infty}\|T^nx-u\|^2$ が存在し, 定理 1.5.7 より

$$\mu_n\|T^nx-u\|^2=\lim_{n\to\infty}\|T^nx-u\|^2$$

となる. よって u は Banach limit μ によらない.

2. 定理 2.2.3 の証明のようにして, $u=\lim_{n\to\infty}PT^nx$ がわかる.

3. $\text{w-}\lim_{n\to\infty}S_nx=\lim_{n\to\infty}PT^nx(=z)$ は 2 よりわかる. また, $f\in F(T)$ に対して,

$$\mu_n\|T^nx-z\|^2=\mu_n\|T^nx-PT^nx\|^2\leqq\mu_n\|T^nx-f\|^2$$

であるから, $u=z$ である.

4. $\mu_n(1)=\dfrac{1}{n^2}\cdot n^2=1$ であり，$|\mu_n(f)|\leqq\dfrac{1}{n^2}\cdot n^2\|f\|=\|f\|$ より明らか.

問　題 2.7

1. 定理 2.1.5 の証明を参照.

2. $a_1, a_2\geqq c$ に対して，

$$\|PT_{a_1}x-PT_{a_2}x\|\leqq\|PT_{a_1}x-PT_cx\|+\|PT_cx-PT_{a_2}x\| \qquad (*)$$

である．また，$\|PT_{a_i}x-PT_cx\|^2\leqq\|T_cx-PT_cx\|^2-\|PT_{a_i}x-T_{a_i}x\|^2$ $(i=1,2)$ であり，$\{\|PT_ax-T_ax\|\colon a\in S\}$ が収束するから，c を十分大きくとることによって，(*) の右辺はいくらでも小さくできる．よって $\{PT_ax\colon a\in S\}$ は Cauchy ネットである.

3. $F(\mathcal{S})\neq\phi$ であるから，$\{T_ax\colon a\in S\}$ は有界である．そこで，$\{T_ax\colon a\in S\}$ の部分ネット $\{T_{a_\alpha}x\}$ である $z\in C$ に弱収束するものがとれる．$w(x)\subset F(\mathcal{S})$ なので，$z\in F(\mathcal{S})$ である．また，$z\in\bigcap_{s\in S}\overline{\mathrm{co}}\{T_tx\colon t\geqq s\}$ であるので，定理 2.7.6 を使うと $\{T_ax\colon a\in S\}$ が $z\in F(\mathcal{S})$ に弱収束することがわかる.

4. 補助定理 2.7.4 より，$\lim_{t\to\infty}PS(t)x$ が存在する．あとは問題 2.6.2 の方法によって，$z=\lim_{t\to\infty}PS(t)x$ がわかる.

問　題 3.1

1. $\|x\|=\|y\|=1$，$\|x-y\|\geqq\varepsilon>0$ とする．このとき，$\delta=1-\sqrt{1-\dfrac{\varepsilon^2}{4}}$ とおくと，平行四辺形公式より

$$\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)-\|x-y\|^2\leqq4-\varepsilon^2=4(1-\delta)^2$$

となる．よって $\dfrac{1}{2}\|x+y\|\leqq1-\delta$ となる.

2. $\|x\|=\|y\|=1(x\neq y)$ に対して $\dfrac{1}{2}\|x+y\|<1$ とする．いま Banach 空間 E が狭義凸でないとすると，$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ となるような一次独立な元 $x, y\in E$ が存在する．一般性を失うことなく $0<\|x\|\leqq\|y\|$ を仮定すると

$$\begin{aligned}2>\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|&=\frac{1}{\|x\|\|y\|}\|\|y\|(x+y)-(\|y\|-\|x\|)y\|\\&\geqq\frac{1}{\|x\|\|y\|}|\|y\|\|x+y\|-(\|y\|-\|x\|)\|y\||\\&=\frac{1}{\|x\|\|y\|}|\|y\|(\|x\|+\|y\|)-(\|y\|-\|x\|)\|y\||=2\end{aligned}$$

となり，矛盾である．よって E は狭義凸となる．逆に，E を狭義凸とする．このとき，$\|x\|=\|y\|=1$ $(x\neq y)$ でかつ $\|x+y\|=2$ となるような $x, y\in E$ が存在したとする．$\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ となるから，x と y は一次従属となる．よって $x=\alpha y$ とすると，$|\alpha|=1$ となる．$x\neq y$ なので $\alpha=1$ ということはない．$\alpha=-1$ とすると，$2=\|x+y\|=\|-y+y\|=0$ となり矛盾である.

3. $\lambda\geqq\dfrac{1}{2}$ ならば，$(1-\lambda)\leqq\dfrac{1}{2}$ なので，一般性を失うことなく，$\lambda\leqq\dfrac{1}{2}$ を仮定してもよい．このとき δ の定義から

$$\begin{aligned}\|\lambda x+(1-\lambda)y\|&=\left\|2\lambda\frac{x+y}{2}+(1-2\lambda)y\right\|\\&\leqq2\lambda r\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right)+r(1-2\lambda)\end{aligned}$$

$$=r\left(1-2\lambda\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right)\leqq r\left(1-2\lambda(1-\lambda)\delta\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)\right).$$

4.　C 上の連続凸関数 g を

$$g(z)=\|x-z\|\qquad (^\forall z\in C)$$

で定義する．すると，$\|z_n\|\to\infty$ ならば $g(z_n)\to\infty$ であるので，定理 1.3.10 と定理 3.1.6 より $g(x_0)=\min\{g(z)\colon z\in C\}$ となる $x_0\in C$ が存在する．すなわち $\|x-x_0\|=d(x,C)$ となる $x_0\in C$ が存在する．このような x_0 が一意であることは，定理 3.1.2 よりわかる．実際，$\|x-x_0\|=\|x-y_0\|=d(x,C)$ とし，$x_0\neq y_0$ とすると，E は (sc) であるから，$\left\|x-\frac{1}{2}(x_0+y_0)\right\|<d(x,C)$ となる．これは矛盾である．

問　題 3.2

1.　$f,g\in J(x)$，$\alpha+\beta=1$ $(\alpha,\beta\geqq 0)$ とする．このとき，

$$(x,\alpha f+\beta g)=\alpha(x,f)+\beta(x,g)=\alpha\|x\|^2+\beta\|x\|^2=\|x\|^2$$

である．よって $\|\alpha f+\beta g\|\geqq\|x\|$ である．また $\|\alpha f+\beta g\|\leqq\alpha\|f\|+\beta\|g\|=\|x\|$ であるので，$\|\alpha f+\beta g\|=\|x\|$ となる．よって $J(x)$ は凸集合である．$J(x)$ が有界で閉となることは明らか．

2.　$\|x\|=\|y\|=1$ とし，$\|x+y\|=2$ とする．このとき，$j\in J\left(\frac{x+y}{2}\right)$ とすると

$$1=\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2=\left(\frac{x+y}{2},j\right)=\frac{1}{2}(x,j)+\frac{1}{2}(y,j)$$
$$\leqq\frac{1}{2}\|x\|\|j\|+\frac{1}{2}\|y\|\|j\|=1$$

である．よって $(x,j)=\|x\|^2=\|j\|^2=1$，$(y,j)=\|y\|^2=\|j\|^2=1$ である．だから，$j\in J(x)\cap J(y)$ となる．これは仮定より $x=y$ を意味する．よって E は (sc) である．

3.　$f\in S(E^*)$ とする．J が上への写像であるから，$f\in J(x)$ となるような $x\in E$ が存在する．$\|x\|=\|f\|=1$ であるから，$f(x)=1$ である．James の定理より E は回帰的である．

4.　E が (s) でないとすると，$x_0\in S(E)$ に対して，$f\neq g$ かつ $f(x_0)=1=g(x_0)$ となるような $f,g\in S(E^*)$ が存在する．$\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|=2$ であり，$(f+g)(x_0)=2$ であるから $\frac{1}{2}(f+g)\in S(E^*)$ となる．よって E^* は (sc) ではない．

5.　E が (sc) でないとすると，$x,y\in S(E)$ $(x\neq y)$ でかつ $\frac{1}{2}(x+y)\in S(E)$ となる x,y が存在する．$g\in S(E^*)$ かつ $g\left(\frac{x+y}{2}\right)=1$ とすると，

$$1=g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{1}{2}g(y)\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

であるので，$g(x)=g(y)=1$ となる．$E\subset E^{**}$ であるので，$x,\ y\in E^{**}$ とすると，$x,y\in J(g)$ である．$x\neq y$ なので E^* は (s) でない．

6.　4, 5 と定理 1.2.9 より明らか．

問　題 3.3

1.　$u_n\to u_0$ とする．$u_0=0$ のときは $\|J(u_n)\|=\|u_n\|\to 0$ であるのでよい．$u_0\neq 0$ とする．仮定より $J\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)\to J\left(\frac{u_0}{\|u_0\|}\right)$ であるので，

$$\|J(u_n)-J(u_0)\|=\|u_n\|\|u_0\|\left\|\frac{J(u_n)-J(u_0)}{\|u_n\|\|u_0\|}\right\|$$
$$=\|u_n\|\|u_0\|\left\|\frac{1}{\|u_0\|}J\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)-\frac{1}{\|u_n\|}J\left(\frac{u_0}{\|u_0\|}\right)\right\|\to 0$$

となる．よって 1 は証明された．

2. E は (uG) なので，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，

$$0<|t|\leqq\delta\Longrightarrow\left|\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}-(y,J(x))\right|<\varepsilon \qquad ({}^\forall x\in S(E))$$

である．あとは定理 3.3.6 の証明と同様である．

3. （i） $f\in S(E^*)$ とする．問題 1.2.4 より，$S(E^*)$ の点列 $\{f_n\}$ で，$\|f_n-f\|\to 0$ でありしかも任意の n に対し，$f_n(x_n)=1$ となるような $x_n\in S(E)$ が存在する点列がある．E^* の仮定より $J(f_n)=x_n$ である．また $f_n\to f$ ならば $J(f_n)\to J(f)$ である．E は E^{**} の閉部分空間なので，$J(f)\in E$ である．よって，$J(f)=x$ となるような $x\in S(E)$ が存在し，すべての $g\in E^*$ に対して，$g(x)=(g,J(f))$ となる．特に，$f(x)=(f,J(f))=1$ となる．だから James の定理によって E は回帰的になる．（ii）は定理 3.3.8 の証明と同様である．または問題 3.2.6 よりわかる．

（iii） $x_n\rightharpoonup x$, $\|x_n\|\to\|x\|$ とする．$x_n, x\in S(E)$ のときは，$J(x)\ni f$ とすると $J(f)=x$ であるから，

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|f+tg\|-\|f\|}{t}=(g,J(f))=(g,x) \qquad ({}^\forall g\in S(E^*))$$

となる．よって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，

$$0<|t|\leqq\delta\Longrightarrow\left|\frac{\|f+tg\|-\|f\|}{t}-(g,x)\right|<\varepsilon \qquad ({}^\forall g\in S(E^*))$$

である．また，$(f,x_n)\to(f,x)=\|x\|^2=1$ でもある．あとは定理 3.3.6 と同様の方法で $x_n\to x$ を証明することができる．x_n, x がともに $S(E)$ に入らない場合も，$x=0$ と $x\neq 0$ の場合に分けて問題 3.3.1 の方法で証明できる．

問　題 3.4

1. $r=\inf_{y\in C}\mu_n\|x_n-y\|$ とし，$z\in M$ とする．このとき，$\mu_n\|x_n-z\|\leqq 1+r$ であるから，ある x_{n_0} が存在して，$\|x_{n_0}-z\|\leqq 2+r$ となる．$\{x_n\}$ は有界であるから，M も有界になる．

2. K を C の有界閉凸集合とし，$r=\inf_{x\in K}r_x(K)$ とする．このとき，

$$c(K)=\{x\in K:\ r_x(K)=r\}$$

は補助定理 3.4.4 より空でない．$u,v\in c(K)$，$u\neq v$ とすると，$r_u(K)=r_v(K)=r$ より，$\|u-x\|\leqq r$ $({}^\forall x\in K)$，$\|v-x\|\leqq r$ $({}^\forall x\in K)$ である．仮定より E は一様凸であるので，$\|u-v\|\geqq\varepsilon>0$ とすると，

$$\left\|\frac{u+v}{2}-x\right\|=\left\|\frac{u-x+v-x}{2}\right\|\leqq r\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right)<r \qquad ({}^\forall x\in K)$$

となる．よって $r_{\frac{u+v}{2}}(K)\leqq r\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right)<r$ となり，$r=\inf_{x\in K}r_x(K)$ に矛盾する．だから $c(K)$ は 1 点からなる．つぎに，2 点以上含む C の有界閉凸集合 K があって $\delta(K)=\inf_{x\in K}r_x(K)$ であるならば，上の議論で $r=\delta(K)$，u, v として K の中の 2 点をとることによって矛盾を得ることができる．よって C は正規構造をもつ．ただし，$\delta(K)$ は K の直径を表す．

3. Kを2点以上含むコンパクトな凸集合として，$r_x(K)<\delta(K)$ となる $x\in K$ の存在を示せばよい．$r_x(K)=\delta(K)$ $({}^\forall x\in K)$ としよう．このとき，任意の $x_1\in K$ に対して，$\|x_1-x_2\|=\delta(K)$ となる $x_2\in K$ が存在する．x_1, x_2 に対し $\left\|\frac{1}{2}(x_1+x_2)-x_3\right\|=\delta(K)$ となる $x_3\in K$ が存在する．この方法で，$\left\|\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-x_{n+1}\right\|=\delta(K)$ となる $x_{n+1}\in K$ が存在する．このようにして，点列 $\{x_n\}$ をつくると，

$$\delta(K)\leqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_{n+1}-x_i\|\leqq\delta(K)$$

であるので，$\delta(K)=\|x_{n+1}-x_i\|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ である．よって $\{x_n\}$ は収束する部分列を含まないことになる．これは K がコンパクトであることに反する．

問　題 3.5

1. 問題1.3.4と定理3.5.7の証明を参照．

2. $z\neq w$ とし，$\|x-z\|=s$, $\|z-y\|=t$ とする．E は狭義凸なので，

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{x-z}{s}+\frac{x-w}{s}\right\|=\frac{1}{s}\left\|x-\frac{z+w}{2}\right\|<1,\quad \frac{1}{t}\left\|y-\frac{z+w}{2}\right\|<1$$

である．だから，$\|x-y\|\leqq\left\|x-\frac{z+w}{2}\right\|+\left\|\frac{z+w}{2}-y\right\|<s+t=\|x-y\|$ となる．これは矛盾である．よって $z=w$ である．

3. $h\in RUC(S)$ を示す．$M=2\sup_{t\in S}\|T_tx-z\|$ とする．いま $s,u\in S$ に対して

$$\begin{aligned}\|r_sh-r_uh\|&=\sup_{t\in S}|(r_sh)(t)-(r_uh)(t)|=\sup_{t\in S}|h(ts)-h(tu)|\\&=\sup_{t\in S}|\|T_{ts}x-z\|^2-\|T_{tu}x-z\|^2|\\&\leqq M\sup_{t\in S}\|T_{ts}x-T_{tu}x\|\leqq M\|T_sx-T_ux\|\end{aligned}$$

である．よって $h\in RUC(S)$ である．つぎに $g\in RUC(S)$ を示す．まず，

$$\begin{aligned}\|r_sg-r_ug\|&=\sup_{t\in S}|g(ts)-g(tu)|\\&=\sup_{t\in S}|(y,J(T_{ts}x-z))-(y,J(T_{tu}x-z))|\\&=\sup_{t\in S}|(y,J(T_{ts}x-z)-J(T_{tu}x-z))|\end{aligned}$$

である．また，$\|T_{ts}x-z-(T_{tu}x-z)\|=\|T_{ts}x-T_{tu}x\|\leqq\|T_sx-T_ux\|$ である．ここで，定理3.3.7を使えば，$g\in RUC(S)$を得る．

問　題 3.6

1. 定理3.6.3の（iv）より $\|A_\lambda x\|\leqq|Ax|$ である．これより $\|x-J_\lambda x\|\leqq\lambda|Ax|$ である．よって，$\lambda\to 0$ ならば $J_\lambda x\to x$ である．

2. $x\in D(A)$ とし，$z'=x+rw$, $w\in Ax$ とする．すると $J_rz'=x$ である．よって

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{r}\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)(x+rw)&=\frac{\lambda}{r}\left(z'-J_rz'+\frac{r}{\lambda}J_rz'\right)=\frac{\lambda}{r}\left(z'-x+\frac{r}{\lambda}x\right)\\&=\frac{\lambda}{r}\left(rw+\frac{r}{\lambda}x\right)=\lambda w+x\in(I+\lambda A)x\end{aligned}$$

である．だから，$\frac{\lambda}{r}\left(I-\left(1-\frac{r}{\lambda}\right)J_r\right)(I+rA)x\subset(I+\lambda A)x$ である．逆も同様．

3. $f\colon E\to(-\infty,\infty]$ は proper で下半連続な凸関数なので，

$$K=\{(x,t)\in E\times\boldsymbol{R}\colon f(x)\leqq t\}$$

は $E\times\boldsymbol{R}$ の閉凸集合で，かつ $K\neq E\times\boldsymbol{R}$ である．$f(x_0)<\infty$ とする．このとき $\varepsilon>0$ に対

し，$(x_0, f(x_0)-\varepsilon)\notin K$ である．分離定理より

$$\sup_{(x,t)\in K}\Phi(x,t)<\Phi(x_0, f(x_0)-\varepsilon)$$

となるような $\Phi\in(E\times\boldsymbol{R})^*$ が存在する．すなわち，

$$\sup_{(x,t)\in K}\{(x,x^*)+t\alpha\}<(x_0,x^*)+\alpha(f(x_0)-\varepsilon)$$

となるような $x^*\in E^*$ と $\alpha\in\boldsymbol{R}$ が存在する．ここで，$\alpha<0$ である．また，$f(x)<\infty$ ならば，$(x, f(x))\in K$ なので，

$$(x,x^*)+\alpha f(x)<(x_0,x^*)+\alpha(f(x_0)-\varepsilon)$$

である．よって，$z^*\in E^*$ と $\mu\in\boldsymbol{R}$ が存在して

$$f(x)\geqq(x,z^*)+\mu \qquad (^\forall x\in E)$$

である．

4.　$g\colon H\to(-\infty,\infty]$ が proper で下半連続な凸関数であることは明らかだから，$\|z_n\|\to\infty$ のとき $g(z_n)\to\infty$ となることを示す．3 によって

$$f(x)\geqq(x,z^*)+\mu \qquad (^\forall x\in H)$$

となる $z^*\in H$ と $\mu\in\boldsymbol{R}$ が存在するから，

$$\begin{aligned} g(x)&\geqq\frac{1}{2}\|x\|^2+(x,z^*)+\mu-(x,x_0^*)\\ &\geqq\frac{1}{2}\|x\|^2-\|x\|\|z^*\|+\mu-\|x\|\|x_0^*\|\\ &=\|x\|\left(\frac{1}{2}\|x\|-\|z^*\|-\|x_0^*\|\right)+\mu \end{aligned}$$

となる．よって $\|z_n\|\to\infty$ ならば，$g(z_n)\to\infty$ である．

問　題 4.1

1.　補助定理 2.1.3 より，任意の $x\in H$ と $y\in C$ に対して，$(x-Px, Px-y)\geqq0$ である．だから補助定理 4.1.6 より P は sunny nonexpansive である．

2.　$\|J_rJ_{t_n}x-J_{t_n}x\|\to0$ より

$$(\|J_{t_n}x-J_rJ_{t_n}x\|+\|J_rJ_{t_n}x-J_ru\|)^2-\|J_rJ_{t_n}x-J_ru\|^2\to0$$

である．だから，問題 1.5.1 と問題 1.5.5 より

$$\begin{aligned} \mu_n\|J_{t_n}x-J_ru\|^2&\leqq\mu_n(\|J_{t_n}x-J_rJ_{t_n}x\|+\|J_rJ_{t_n}x-J_ru\|)^2\\ &=\mu_n\|J_rJ_{t_n}x-J_ru\|^2. \end{aligned}$$

3.　略．

問　題 4.2

1.　E が (us) なので，定理 3.2.3 と定理 3.3.8 を使えば，E 上の双対写像 J は E の有界集合上で一様連続である．これと，$\|J_{t_n}x-y-(J_{t_n}x-J_{t_n}y)\|\to0$ であることから，まず

$$\begin{aligned} &|(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-y))-(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-J_{t_n}y))|\\ &=|(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-y)-J(J_{t_n}x-J_{t_n}y))|\\ &\leqq\|x-J_{t_n}x\|\|J(J_{t_n}x-y)-J(J_{t_n}x-J_{t_n}y)\|\to0 \end{aligned}$$

を得る．よって問題 1.5.5 より

$$\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-y))=\mu_n(x-J_{t_n}x, J(J_{t_n}x-J_{t_n}y))$$

である．

2.　略．

問　題 4.3

1.　$\{x_n\}$ は有界だから，Banach limit μ に対して，$C=\overline{\mathrm{co}}\,D(A)$ 上の関数 g を

$$g(z)=\mu_n\|x_n-z\| \qquad (^\forall z\in C)$$

で定義できる．この g は連続で凸関数である．また $\|z_n\|\to\infty$ ならば $g(z_n)\to\infty$ である．よって定理 1.3.10 より，$M=\{u\in C:\ g(u)=\min_{z\in C} g(z)\}$ は空でない有界閉凸集合である．一方，$J_1=(I+A)^{-1}$ は nonexpansive 写像であり，仮定より，$J_1C\subset C$ である．これから $J_1M\subset M$ を得る．実際 $x_n+y_n\in(I+A)x_n$ なので，$J_1(x_n+y_n)=x_n$ である．だから，$x\in M$ ならば

$$\|x_n-J_1x\|=\|J_1(x_n+y_n)-J_1x\|\leqq\|x_n+y_n-x\|\leqq\|x_n-x\|+\|y_n\|$$

であり，それゆえ $\mu_n\|x_n-J_1x\|\leqq\mu_n\|x_n-x\|+\mu_n\|y_n\|=\mu_n\|x_n-x\|$ を得る．よって，$J_1x\in M$ である．ここで，不動点定理(定理 3.4.6)より，$J_1v=v$ となる v が存在する．これは $v\in(I+A)v$ を意味するから，$0\in Av$ である．

2.　$x\in C$ とする．このとき，

$$\|PT^{n+1}x-T^{n+1}x\|\leqq\|PT^nx-T^{n+1}x\|\leqq\|PT^nx-T^nx\|$$

であるから，$r=\lim_{n\to\infty}\|PT^nx-T^nx\|$ が存在する．$r=0$ のとき，$m\geqq n$ ならば

$$\begin{aligned}\|PT^mx-PT^nx\|&\leqq\|PT^mx-T^mx\|+\|T^mx-PT^nx\|\\&\leqq\|PT^mx-T^mx\|+\|T^nx-PT^nx\|\to0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

であるから，$\{PT^nx\}$ は Cauchy 列となる．$r>0$ とする．このとき，$\varepsilon>0$ に対して，

$$(r+d)\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right)<r$$

となるように $d>0$ をとることができるが，この $d>0$ に対して十分大きい m をとることによって，$k\geqq m$ ならば $\|PT^kx-T^kx\|<r+d$ となるようにできる．いま，$\{PT^nx\}$ が Cauchy 列でないとすると，ある $\varepsilon>0$ が存在して，どんな n をとっても $\|PT^ix-PT^jx\|\geqq\varepsilon$ となるような $i,j\geqq n$ をとることができる．だから前の m に対しても $\|PT^ix-PT^jx\|\geqq\varepsilon$ となるように $i,j\geqq m$ をとることができる．$j\geqq i$ とすると

$$\|PT^ix-T^jx\|\leqq\|PT^ix-T^ix\|<r+d,\ \|PT^jx-T^jx\|\leqq\|PT^ix-T^ix\|<r+d$$

であるから，

$$\begin{aligned}\|T^jx-PT^jx\|&\leqq\left\|T^jx-\frac{1}{2}(PT^ix+PT^jx)\right\|\\&\leqq(r+d)\left(1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{r+d}\right)\right)<r\end{aligned}$$

となり，$\|T^nx-PT^nx\|\geqq r$ に矛盾する．よって $\{PT^nx\}$ は Cauchy 列である．

3.　Hahn-Banach の定理を用いて証明できるが，問題 5.5.1 を参照してもよい．

4.　p_n が h に強収束しないとすると，$\|p_{n_i}-h\|\geqq\varepsilon>0$ となるような正数 $\varepsilon>0$ と $\{p_{n_i}\}$ が存在する．問題 3.1.3 より，

$$\left\|\frac{p_{n_i}+h}{2}-g\right\|=\left\|\frac{1}{2}(p_{n_i}-g+h-g)\right\|\leqq\|h-g\|\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|h-g\|}\right)\right)$$

である．よって

$$\|p_{n_i}-g\|\leqq\left\|\frac{p_{n_i}+h}{2}-g\right\|\leqq\|h-g\|\left(1-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|h-g\|}\right)\right)<\|h-g\|$$

となる．だから $\varliminf_{n\to\infty}\|p_n-g\|<\|h-g\|$ となる．これは矛盾である．

問　題 4.4

1.　$\|T_\mu x\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |(T_\mu x, x^*)| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\mu_t(T_t x, x^*)| \leqq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \|T_t x\| \|x^*\| \leqq C\|x\|$ より，$\|T_\mu\| \leqq C$ である．$T_\mu x \in \overline{\text{co}}\{T_t x\colon t\in S\}$ となることは，補助定理 2.4.1 の証明方法を参照すればよい．

2.　$x\in E$ とする．$\{T^n x\colon n=1,2,\cdots\} = T(\{T^{n-1}x\colon n=1,2,\cdots\}) \subset T(U)$（ただし，$U$ は 0 を中心とし，半径 $(C+1)\|x\|$ の閉球である）なので，$\{T^n x\colon n=1,2,\cdots\}$ の弱閉包は弱コンパクトとなる．$S=\{1,2,\cdots\}$ とし，$B(S)$ 上の mean μ_n を

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad (\forall f\in B(S))$$

とすると，$\|\mu_n - r_k{}^*\mu_n\| \leqq 2k/n \to 0$ $(\forall k\in S)$ である．よって定理 4.4.7 より，2 がわかる．

3, 4, 5 は定理 2.6.2，定理 2.6.1，定理 2.6.3 の証明をそれぞれ参照．

問　題 5.1

1.　$x\in B^{-1}y \Longrightarrow y\in Bx \Longrightarrow y\in Ax \Longrightarrow x\in A^{-1}y$．よって $B^{-1}y\subset A^{-1}y$ である．

2.　任意の $y\in X$ に対して，$By=A^{-1}y$ とすると，任意の $x\in X$ に対して，$B^{-1}x=Ax$ である．実際，

$$y\in B^{-1}x \Longleftrightarrow x\in By \Longleftrightarrow x\in A^{-1}y \Longleftrightarrow y\in Ax$$

である．ここで，Fan–Browder の不動点定理（定理 5.1.6）を用いると，$x_0\in Bx_0$ となる $x_0\in X$ が存在する．よって $x_0\in A^{-1}x_0$，すなわち $Ax_0\ni x_0$ となる $x_0\in X$ が存在する．

3.　$x, y\in \bigcup_{\mu\in M} S_\mu$, $0\leqq\lambda\leqq 1$ とすると，$x\in S_{\mu_1}$, $y\in S_{\mu_2}$ となる μ_1, $\mu_2\in M$ が存在する．このとき，$S_{\mu_1}, S_{\mu_2}\subset S_{\mu_3}$ となる $\mu_3\in M$ が存在するので，$x, y\in S_{\mu_3}$ となり，よって，$\lambda x+(1-\lambda)y\in S_{\mu_3}$ となる．だから $\lambda x+(1-\lambda)y\in \bigcup_{\mu\in M} S_\mu$ である．

4.　$G(x,y)=-F(x,y)$ とすると，$G(x,y)$ は定理 5.1.9 の（1），（2）の条件を満たすことは明らか．また $F(x,x)\leqq c$ より $G(x,x)\geqq -c$ である．よって定理 5.1.9 より，$G(x_0,y)\geqq -c$ $(\forall y\in X)$，すなわち $F(x_0,y)\leqq c$ $(\forall y\in X)$ となるような $x_0\in X$ が存在する．

問　題 5.2

1.　$x_0\in X$ とする．V を Tx_0 の近傍とすると，

$$W=\{x\in X\colon d(x, Tx_0)<\varepsilon\}\subset V$$

となるような正数 $\varepsilon>0$ が存在する．いま $x\in S_\varepsilon(x_0)$ とすると

$$\sup_{y\in Tx} d(y, Tx_0) \leqq H(Tx_0, Tx) \leqq d(x_0, x) < \varepsilon$$

より，$Tx\subset W\subset V$ となり，T は X で上半連続となる．

2.　l^∞ 上の mean の全体 $M=\{\mu\colon \|\mu\|=\mu(e)=1\}$ は弱*コンパクトで凸集合となる．また，$(x_1, x_2, \cdots)\to(x_2, x_3, \cdots)$ で定義される l^∞ 上の写像 r_1 の共役写像 $r_1{}^*$ は M から M への連続写像になる．よって Tychonoff の不動点定理より，$r_1{}^*\mu=\mu$ となる $\mu\in M$ が存在する．これは $\mu_n(x_n)=\mu_n(x_{n+1})$，$\|\mu\|=\mu(e)=1$ を意味するから，Banach limit の存在がわかる．

3.　局所凸な線形位相空間のコンパクト凸集合上で定義されたアフィン連続写像 T は Tychonoff の不動点定理から不動点をもち，さらに不動点全体の集合 $F(T)$ はコンパクト凸集合になる．あとは問題 2.4.4 の方法で 3 が証明できる．

問　題 5.3

1.　補助定理 5.5.5 のようにして，$\beta_i(x)f_i(x)$ が下半連続であることがわかる．だか

ら定理 1.3.4 により $g(x)=F(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)f_i(x)$ も X で下半連続である．

2. X を線形位相空間のコンパクトな凸集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ を X 上で定義され，$(-\infty, \infty)$ に値をとる下半連続で凸な関数とする．また，

$$Y=S_n=\left\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\right\}$$

に対して，$X\times Y$ 上の実数値関数 F を

$$F(x,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)$$

で定義する．このとき，定理 5.3.2(minimax 定理)より

$$\max_{\alpha\in Y}\min_{x\in X}F(x,\alpha)=\min_{x\in X}\max_{\alpha\in Y}F(x,\alpha)$$

である．ここで，(2) の仮定より $\max_{\alpha\in Y}\min_{x\in X}F(x,\alpha)\leqq c$ である．よって

$$\min_{x\in X}\max_{\alpha\in Y}F(x,\alpha)=\min_{x\in X}\max_{\alpha\in Y}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\leqq c$$

となる．だから，$\max_{\alpha\in Y}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)\leqq c$ となるような $x_0\in X$ が存在する．α として $\alpha^1=(1,0,0,\cdots,0), \alpha^2=(0,1,0,\cdots,0), \cdots, \alpha^n=(0,0,\cdots,1)\in Y$ をとると，

$$f_i(x_0)\leqq c \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

であることがわかる．これで (2)⟹(1) が証明できた．(1)⟹(2) は明らか．

3. (1)⟹(2): X はコンパクトであり，$\{A(f):\ f\in\mathcal{F}\}$ は有限交叉性をもつので，$\bigcap_{f\in\mathcal{F}}A(f)\neq\phi$ である．$x_0\in\bigcap_{f\in\mathcal{F}}A(f)$ としよう．$f(x_0)\leqq c\ (^\forall f\in\mathcal{F})$ なので $\sup_{f\in\mathcal{F}}f(x_0)\leqq c$ である．よって $\min_{x\in X}\sup_{f\in\mathcal{F}}f(x)\leqq\sup_{f\in\mathcal{F}}f(x_0)\leqq c=\sup_{f\in\mathcal{F}}\min_{x\in X}f(x)$ である．逆の不等式は明らかなので，(1)⟹(2) は証明された．

(2)⟹(1):
$$\min_{x\in X}\sup_{f\in\mathcal{F}}f(x)=\sup_{f\in\mathcal{F}}\min_{x\in X}f(x)=c$$

なので，$\sup_{f\in\mathcal{F}}f(x_0)=c$ となる $x_0\in X$ が存在する．よって $f(x_0)\leqq c\ (^\forall f\in\mathcal{F})$ である．だから $\{A(f):\ f\in\mathcal{F}\}$ は有限交叉性をもつ．

問　題 5.4

1. ノルム空間 E において，$p(x)=\rho\|x\|$ とおいて，Mazur–Orlicz の定理を用いれば 1 が得られる．

2. X を E のコンパクト凸集合とし，T を X から X へのアフィン連続関数とする．いま $f\in E^*$ に対して，X 上の関数 F_f を

$$F_f(x)=f(Tx)-f(x) \qquad (^\forall x\in X)$$

で定義する．このとき F_f は X 上の下半連続で凸な関数である．$f_1, f_2, \cdots, f_n\in E^*$ とし，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ を非負な数で $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ となるものとする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_{f_i}(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right)(Tx)-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right)(x)$$

であるので，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_{f_i}(z)\leqq 0$ となる $z\in X$ が存在する．(実際，$f\in E^*$ に対して，$f(z)=\max\{f(y):\ y\in X\}$ となる $z\in X$ をとればよい．) ここで定理 5.4.2 を用いて，$f(Tx_0)\leqq f(x_0)\ (^\forall f\in E^*)$ となる $x_0\in X$ が存在する．よって $Tx_0=x_0$ である．あとは問題 2.4.4 の方法を用いればよい．

問　題 5.5

1.　(1)を仮定する．このとき，定理 5.5.4 より

$$\inf\{L(y-x)\colon y\in K\}=\|x_0-x\|,\ \ \|L\|=1$$

となるような E 上の線形連続汎関数 L が存在する．いま $f=-\|x_0-x\|L$ とすると，$\|x_0-x\|\leqq L(x_0-x)\leqq\|x_0-x\|$ より，

$$f(x-x_0)=-\|x_0-x\|L(x-x_0)=\|x_0-x\|^2=\|f\|^2$$

となる．よって $f=-\|x_0-x\|L\in J(x-x_0)$ である．だから，任意の $y\in K$ に対し，

$$\begin{aligned}f(x_0-y)&=f(x_0-x+x-y)=-\|x_0-x\|^2-\|x_0-x\|L(x-y)\\&=-\|x_0-x\|^2+\|x_0-x\|L(y-x)\geqq-\|x_0-x\|^2+\|x_0-x\|^2=0\end{aligned}$$

となる．ゆえに $(x_0-y,f)\geqq0$ ($^\forall y\in K$) となる $f\in J(x-x_0)$ が存在する．これは (2) を意味する．逆に，(2) が成立するような $j\in J(x-x_0)$ に対して，$L=\dfrac{1}{\|x-x_0\|}j$ とすると ($\|x-x_0\|=0$ のときは (1) はつねに成立するので考えなくてもよい)，$\|L\|=1$ である．また，

$$\begin{aligned}\|x-x_0\|^2&=(x-x_0,j)=(x-y+y-x_0,j)\\&\leqq\|x-y\|\|j\|+(y-x_0,j)\leqq\|x-y\|\|j\|\end{aligned}$$

より，$\|x-x_0\|=\inf\{\|x-y\|\colon y\in K\}$ である．よって (1) が成り立つ．

2.　$x\in C$ とし，$y\in C_0$ とする．また，$x_t=Px+t(x-Px)$ $(0\leqq t\leqq1)$ とすると，$x_t\in C$ であり，$\|y-Px\|=\|Py-Px_t\|\leqq\|y-x_t\|$ $(0\leqq t\leqq1)$ が成り立つ．ここで，1 を用いると，$(Px-x_t,J(y-Px))\geqq0$ $(0\leqq t\leqq1)$ が得られる．よって，$(x-Px,J(Px-y))\geqq0$ である．

3.　D 上の連続関数 g を

$$g(x)=d(x,C)\qquad(^\forall x\in D)$$

で定義する．$C\cap D=\phi$ なので $g(x)>0$ ($^\forall x\in D$) である．D はコンパクトなので，$d(C,D)=\inf\limits_{x\in D}d(x,C)>0$ であることがわかる．

問　題 6.1

1.　$X\subset H$ は弱コンパクトな凸集合であり，$S=I-T$ は X から H への monotone で hemicontinuous な写像である．だから定理 6.1.8 を用いて，

$$(x-x_0,\ Sx_0)\geqq0\qquad(^\forall x\in X)$$

となる $x_0\in X$ が存在する．いま $x=Tx_0$ とすると，$(Tx_0-x_0,x_0-Tx_0)\geqq0$ となり，$-\|Tx_0-x_0\|^2\geqq0$ となる．これは $Tx_0=x_0$ を意味する．

2.　$T\colon X\to E^*$ は monotone であるから，$(y-x_i,\ Ty-Tx_i)\geqq0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ となる．また，$\sum_{i=1}^n\alpha_i=1$ となる非負の数 α_i に対して，

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i(y-x_i,\ Tx_i)\leqq\sum_{i=1}^n\alpha_i(y-x_i,\ Ty)=\left(y-\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i,\ Ty\right)\qquad(^\forall y\in X)$$

であるから，$y=y_0=\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i$ とすると

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i(y_0-x_i,\ Tx_i)\leqq0$$

となる．ここで定理 5.3.5 を用いると $\inf\limits_{y\in X}\max\limits_i(y-x_i,\ Tx_i)\leqq0$ を得る．

3.　$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ を X の有限個の点とする．2 より $\inf\limits_{y\in X}\max\limits_i(y-x_i,\ Tx_i)\leqq0$ であ

り，Xはコンパクトなので，

$$(y_0-x_i,\ Tx_i)\leqq 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

となる$y_0\in X$が存在する．Xがコンパクトであることを再び使うと

$$(x_0-x,\ Tx)\leqq 0 \qquad (^\forall x\in X)$$

となる$x_0\in X$の存在がわかる．

問　題 6.2

1, 2.　略．

問　題 6.3

1.　GをEの有界集合とすると，$\overline{A(G)}$はコンパクト集合である．Tが連続であるので$T\overline{A(G)}$もコンパクトである．よって$\overline{TA(G)}=T\overline{A(G)}$もコンパクト集合である．だから$TA$はコンパクト作用素である．$AT$がコンパクト作用素であることは，$T(G)$がまず有界となり，$\overline{AT(G)}$がコンパクトとなるからである．

2.　必要性は明らかである．十分性を示す．結論を否定すると定理 5.4.2 より

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_{\nu i}(x)>0 \qquad (^\forall x\in X)$$

となるような$\delta=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)\in T_n$と$\{f_{\nu i}\}_{i=1}^{n}\subset\Sigma$を得る．そこで

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_{\nu i}(x)\geqq\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_{\nu i}(x_0)=\alpha>0 \qquad (^\forall x\in X) \qquad (*)$$

となるような$x_0\in X$が存在する．δ_i $(i=1,2,\cdots,n)$の分母で最大なものを（*）の両辺に掛けることによって命題は証明される．

3.　（2）⟹（3）：$\sum_{i=1}^{n}T_i f_i(x)\leqq\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$となる$x\in X$が存在するとする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n}T_i f_i(x)+f_{n+1}(x)\leqq\sum_{i=1}^{n}f_i(x)+f_{n+1}(x)=c$$

より（3）がいえたことになる．（3）⟹（2）：任意の$(T_1,T_2,\cdots,T_n)\in\Sigma^n$と，$(f_1, f_2,\cdots,f_n)\in C(X)_+{}^n$に対し，$c=\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$とし，$f_{n+1}=c-\sum_{i=1}^{n}f_i$とすると，（3）より，$\sum_{i=1}^{n}T_i f_i(x)+f_{n+1}(x)\leqq c$となる$x\in X$が存在する．それゆえ，

$$\sum_{i=1}^{n}T_i f_i(x)\leqq c-f_{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$$

となる$x\in X$の存在がわかる．

4.　$f\in C(X)$に対して，$\|\hat{T}f\|=\sup_{x\in X}|(\hat{T}f)(x)|=\sup_{x\in X}|f(Tx)|\leqq\|f\|$である．よって$\|\hat{T}\|\leqq 1$．また$\hat{T}1=1$であり，$f\geqq 0$のとき$\hat{T}f\geqq 0$も定義より明らか．

問　題 6.4

1.　$X\times F_+{}^*$上の関数

$$F(x,\varphi)=(G(x),\varphi) \qquad (^\forall(x,\varphi)\in X\times F_+{}^*)$$

に minimax 定理を適用すればよい．

2.　略．

和文索引

た　行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

欧文索引

記号一覧

著 者 略 歴

高 橋　　涉 (たかはし　わたる)

1971 年　東京工業大学大学院理工学研究科
　　　　数学専攻博士課程修了

1971 年　理学博士(東京工業大学)

1971 年　東京工業大学助手

1972 年　横浜国立大学助教授

1974 年　東京工業大学助教授，
　　　　現在に至る．

主 要 著 書

集合・位相空間要論(共著，培風館，1979)

演習・集合位相空間(共著，培風館，1985)

現代解析学入門(近代科学社，1990)

現代数学ゼミナール 7

非線形関数解析学

——不動点定理とその周辺——

1988 年 5 月 30 日　初 版 発 行

1992 年 3 月 20 日　初版第 3 刷発行

著 者　高 橋 涉

発行者　櫻 井 慧 子

発行所　株式会社 近代科学社

〒162 東京都新宿区市ケ谷田町 2-7-15

電話 03(3260)6161 振替(東京)6-7625

定価 2884 円

海外印刷・大日本法令印刷　**ISBN4-7649-1008-X**